



# Etude du comportement du Nucleus pulposus à l'aide d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion

Violette Brulliard

## ► To cite this version:

Violette Brulliard. Etude du comportement du Nucleus pulposus à l'aide d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2014. Français. NNT: . tel-01224563

**HAL Id: tel-01224563**

**<https://hal.science/tel-01224563>**

Submitted on 4 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Violette BRULLIARD**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
**grade de Docteur de l'Ecole Centrale de Nantes**  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale** : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture (SPIGA)

**Discipline** : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

**Unité de recherche** : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)

**Soutenue le 10 juin 2014**

## **Etude du comportement du *Nucleus pulposus* à l'aide d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion**

### **JURY**

Président :	<b>Patrick CHABRAND</b> , Professeur d'Université, ISM, Aix-Marseille Université
Rapporteurs :	<b>Mathias BRIEU</b> , Professeur d'Université, LML, Ecole Centrale de Lille <b>Grégory CHAGNON</b> , Maître de Conférences HDR, TIMC-IMAG, Université de Grenoble
Examineur :	<b>Erwan VERRON</b> , Professeur d'Université, GeM, Ecole Centrale de Nantes
Directeur de Thèse :	<b>Steven LE CORRE</b> , Professeur d'Université, LTN, Polytech' Nantes
Co-directeur de Thèse :	<b>Pierre WEISS</b> , Professeur d'Université, LIOAD-INSERM, CHU de Nantes



*A mes grands-parents,*



# Remerciements

Les remerciements, dans une thèse, ont un statut un peu particulier. Tout le monde dit : « les remerciements, on s'en f\*\*\* ». En réalité, c'est bien souvent la première chose que l'on lit au moins pour satisfaire notre curiosité. Je vais donc tâcher de m'appliquer ici.

Cette thèse est le fruit d'un travail de trois ans effectué au sein de l'équipe MPTC du GeM, à l'Ecole Centrale de Nantes. Elle a été menée en partenariat avec le LIOAD, dans le cadre du projet de recherche BIOREGOS II et financée conjointement par le CNRS et la région Pays-de-la-Loire. J'adresse donc, dans un premier temps, mes remerciements à l'ensemble de ces partenaires administratifs et financiers.

Je remercie également Messieurs Grégory CHAGNON et Mathias BRIEU d'avoir rapporté ce travail de thèse, ainsi que Monsieur Patrick CHABRAND de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Pierre WEISS d'avoir apporté la problématique médicale et de m'avoir permis de prendre part au programme BIOREGOS II. J'associe à ces remerciements Johann CLOUET, Olivier HAMEL, Jérôme GUICHEUX et Gildas RETHORE avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger lors des mes passages au LIOAD. Même si nos disciplines de prédilections demeurent assez éloignées, j'admire la curiosité et l'enthousiasme dont vous avez su faire preuve.

Je remercie sincèrement Steven LE CORRE et Erwan VERRON d'avoir commencé par encadrer mon travail de MASTER et d'avoir poursuivi avec cette thèse. Steven, j' imagine que diriger ce travail de thèse à distance n'a pas forcément été évident, mais je te remercie pour ta gentillesse, ton calme et ta disponibilité. Erwan, je reprends ta formule, mais merci d'avoir su être optimiste pour deux. Merci aussi pour tes grandes qualités pédagogiques, et pour ta capacité à savoir faire la part des choses.

Un grand merci Bertrand et à l'équipe Soft Materials (ou SM pour les intimes) pour la bonne ambiance lors de nos réunions et en dehors : je pense, en particulier, au dernier ECCMR à San Sebastian où, quand même, on s'est bien marré ! Merci aussi à tous mes « co-bureaux » : Pierre, Qi et Anne-So dans l'ancien bâtiment, Guangtao dans le nouveau, et J.-C. qui m'a suivie dans mon nouveau boulot ! Merci à Manue, Jean-Mi, Michel, Sébastien et Felipe, ainsi qu'à l'ensemble des doctorants, post-doc et stagiaires : si cette équipe est cool et dynamique, c'est grâce à vous ! Merci à tous pour les moments partagés au labo ou ailleurs. J'ai bien conscience qu'il vous faudra trouver un nouveau leader charismatique (;-D) mais je compte sur vous pour entretenir la ferveur du vendredi soir...

Enfin, puisque le cadre strictement professionnel est largement dépassé, je voudrais saluer mes amis - de Nantes, d'Ardèche ou d'ailleurs - et mes proches - en particulier Caroline et Pol, parce que pour un brouillon et une bavure, vous vous en tirez plutôt bien ; mes parents, parce que les chiens ne font pas des chats ; et Laurent, parce que ce qui fait mon bonheur, c'est que tu sois à mes côtés.

# Table des matières

<b>Table des illustrations</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Anatomie, mécanique et modélisation du disque intervertébral</b>	<b>5</b>
1.1 Le disque intervertébral . . . . .	6
1.1.1 De la colonne vertébrale au disque intervertébral . . . . .	6
1.1.2 Anatomie et physiologie du disque intervertébral sain . . . . .	9
1.1.2.1 Les plateaux cartilagineux . . . . .	10
1.1.2.2 L' <i>Annulus fibrosus</i> . . . . .	11
1.1.2.3 Le <i>Nucleus pulposus</i> . . . . .	11
1.1.3 Comportement mécanique du disque intervertébral sain . . . . .	12
1.1.3.1 Comportement de l'AF, du NP et du tissu intervertébral . . . . .	12
1.1.3.2 Fonction mécanique globale du DIV . . . . .	13
1.1.4 Le problème de la dégénérescence discale . . . . .	15
1.1.4.1 Qu'est-ce que la dégénérescence discale ? . . . . .	15
1.1.4.2 Remplacement et reconstruction du disque dégénéré . . . . .	19
1.1.5 Bilan . . . . .	21
1.2 Modélisation du disque intervertébral . . . . .	21
1.2.1 Géométrie . . . . .	22
1.2.2 Lois de comportement et propriétés matériau . . . . .	24
1.2.2.1 Plateaux cartilagineux . . . . .	25
1.2.2.2 <i>Annulus fibrosus</i> , substance fondamentale et fibres . . . . .	25
1.2.2.3 <i>Nucleus pulposus</i> . . . . .	27
1.2.3 Chargement . . . . .	32
1.2.4 Bilan . . . . .	36
1.3 Objectifs et Méthodes . . . . .	36
1.3.1 Objectif : une meilleure compréhension du comportement mécanique . . . . .	36
1.3.2 Idées et méthodes : utilisation d'un modèle de type « gel » . . . . .	38
1.4 Conclusion . . . . .	39
<b>2 Développement d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion</b>	<b>41</b>
2.1 Gonflement des gels : rappel bibliographique . . . . .	43
2.1.1 Mélange solvant-polymère . . . . .	44
2.1.2 Elasticité d'un réseau réticulé non gonflé et d'un réseau gonflé . . . . .	47
2.1.3 Couplage entre grandes déformations et gonflement . . . . .	51



2.1.4	Modèles récents : généralisation au cadre tridimensionnel . . . . .	53
2.1.5	Bilan . . . . .	54
2.2	Rappel : équations d'équilibre . . . . .	55
2.3	Déviaton par rapport à la théorie classique . . . . .	58
2.3.1	Motivation . . . . .	58
2.3.2	Dérivation du modèle . . . . .	59
2.3.2.1	Cinématique . . . . .	59
2.3.2.2	Théorie constitutive . . . . .	60
2.3.2.3	Spécialisation de la théorie . . . . .	64
2.3.3	Mise en œuvre numérique . . . . .	71
2.3.3.1	Choix du code de calcul et stratégie d'implantation . . . . .	72
2.3.3.2	Méthodologie . . . . .	72
2.3.4	Quelques applications . . . . .	76
2.3.4.1	Etats d'équilibre . . . . .	76
2.3.4.2	Etats hors équilibre . . . . .	91
2.3.5	Bilan . . . . .	94
2.4	Prise en compte d'une configuration de référence gonflée . . . . .	95
2.4.1	Motivation . . . . .	95
2.4.2	Dérivation du modèle . . . . .	96
2.4.2.1	Cinématique . . . . .	96
2.4.2.2	Théorie constitutive et spécialisation de la théorie . . . . .	97
2.4.2.3	Adaptations numériques . . . . .	101
2.4.3	Quelques applications . . . . .	102
2.4.4	Bilan . . . . .	107
2.5	Conclusion . . . . .	108
<b>3</b>	<b>Application au disque intervertébral : modélisation Eléments Finis</b>	<b>109</b>
3.1	Mise en œuvre du modèle . . . . .	111
3.1.1	Géométrie 3D du disque intervertébral . . . . .	111
3.1.2	Maillage . . . . .	114
3.1.3	Méthodologie de chargement et conditions aux limites . . . . .	116
3.1.4	Lois de comportement et propriétés matériau . . . . .	117
3.1.4.1	Plateaux cartilagineux . . . . .	117
3.1.4.2	<i>Nucleus pulposus</i> . . . . .	118
3.1.4.3	<i>Annulus fibrosus</i> . . . . .	121
3.1.5	Bilan . . . . .	122
3.2	Etude de la réponse mécanique du DIV en compression . . . . .	123
3.2.1	Validation du modèle . . . . .	123
3.2.2	Influence du noyau central sur la réponse en compression du DIV . . . . .	130
3.2.3	Bilan . . . . .	136
3.3	Etude de la réponse mécanique du DIV dans d'autres cas de chargement . . . . .	137
3.3.1	Méthodologie . . . . .	137
3.3.1.1	Cas d'étude . . . . .	137
3.3.1.2	Passage de l'expérience au modèle . . . . .	138
3.3.1.3	Forme des résultats présentés . . . . .	140
3.3.2	Résultats selon le type de sollicitation . . . . .	142

3.3.2.1	Compression . . . . .	142
3.3.2.2	Flexion . . . . .	144
3.3.2.3	Extension . . . . .	148
3.3.2.4	Inclinaison latérale . . . . .	150
3.3.2.5	Torsion . . . . .	154
3.3.2.6	Cisaillement antérieur . . . . .	156
3.3.2.7	Cisaillement postérieur . . . . .	158
3.3.2.8	Cisaillement latéral . . . . .	162
3.3.3	Bilan . . . . .	164
3.4	Discussion et conclusion . . . . .	168
<b>Conclusion générale</b>		<b>169</b>
<b>Références bibliographiques</b>		<b>173</b>
<b>A Subroutine UHYPER pour le modèle généralisé</b>		<b>189</b>
<b>B Gonflement uniaxial transitoire, code Matlab</b>		<b>193</b>
<b>C Subroutine UHYPER pour le modèle préalablement gonflé</b>		<b>197</b>



# Table des illustrations

## Figures

1	Disque intervertébral . . . . .	1
2	Hydrogel pour la réalisation de matrices extracellulaires synthétiques . . . . .	2
1.1	Vues de face, dos et profil de la colonne vertébrale . . . . .	6
1.2	Schéma d'un segment lombaire illustrant l'emplacement du DIV . . . . .	7
1.3	Mouvements de la colonne vertébrale dans les plans anatomiques de référence . . . . .	8
1.4	Amplitudes de mouvement <i>ex vivo</i> selon le niveau lombaire . . . . .	8
1.5	Représentation des trois structures essentielles du DIV . . . . .	9
1.6	Photographies d'un DIV sain en coupe transversale et sagittale . . . . .	10
1.7	Organisation lamellaire de l'AF . . . . .	12
1.8	Variation de la pression intradiscale en fonction de la posture . . . . .	14
1.9	Illustration de la grande propension à gonfler d'un NP . . . . .	15
1.10	Schéma illustrant le fonctionnement mécanique du DIV . . . . .	15
1.11	Photographies d'un DIV dégénéré en coupe transversale et sagittale . . . . .	16
1.12	Phénomène de hernie discale . . . . .	17
1.13	Classification de la dégénérescence selon les grades de Thomson . . . . .	18
1.14	Exemples d'implants totaux de DIV et d'implants partiels de NP . . . . .	20
1.15	Modélisation des fibres de l'AF à l'aide d'éléments discrets . . . . .	27
1.16	Schéma représentant les échelles de temps pour observer la réponse du DIV . . . . .	37
2.1	Schéma de formation et de gonflement d'un gel : mélange solvant-polymère . . . . .	43
2.2	Illustration du gonflement d'un gel . . . . .	44
2.3	Mélange binaire de deux espèces A et B sans changement de volume . . . . .	45
2.4	Différents types de mélanges binaires . . . . .	46
2.5	Schéma de la décomposition multiplicative du gradient (réf. état sec) . . . . .	60
2.6	Gonflement libre de contrainte . . . . .	77
2.7	Définition du chargement imposé en terme de potentiel chimique . . . . .	77
2.8	Distribution spatiale du champ de déplacement en gonflement libre (EF) . . . . .	78
2.9	Influence du paramètre $\varepsilon$ (gonflement libre) . . . . .	79
2.10	Influence des paramètres matériau $C_0$ et $\chi$ (gonflement libre) . . . . .	80
2.11	Comparaison des résultats analytiques et EF (gonflement libre) . . . . .	80
2.12	Schéma illustrant le gonflement uniaxial . . . . .	81
2.13	Distribution spatiale du champ contrainte en gonflement uniaxial (EF) . . . . .	82
2.14	Influence du paramètre $\varepsilon$ (gonflement uniaxial) . . . . .	83
2.15	Influence des paramètres matériau $C_0$ et $\chi$ (gonflement uniaxial) . . . . .	85

2.16	Comparaison des résultats analytiques et EF (gonflement uniaxial) . . . . .	86
2.17	Schéma illustrant l'exemple de trac./compr. uniaxiale et gonflement combinés	87
2.18	Distribution spatiale du déplacement en traction/compression uniaxiale (EF)	88
2.19	Influence du paramètre $\varepsilon$ (traction/compression uniaxiale) . . . . .	89
2.20	Influence des paramètres matériau $C_0$ et $\chi$ (traction/compression uniaxiale)	90
2.21	Comparaison des résultats analytiques et EF (traction/compression uniaxiale)	91
2.22	Résolution analytique du problème de gonflement uniaxial transitoire . . . . .	94
2.23	Schéma de la décomposition multiplicative du gradient (réf. gonflée) . . . . .	97
2.24	Influence de la fraction volumique (réf. gonflée ; gonflement libre) . . . . .	103
2.25	Comparaison des résultats analytiques et EF (réf. gonflée ; gonflement libre)	103
2.26	Influence de la fraction volumique (réf. gonflée ; gonflement uniaxial) . . . . .	105
2.27	Comparaison des résultats analytiques et EF (réf. gonflée ; gonflement libre)	105
2.28	Influence de la fraction volumique (réf. gonflée ; traction/compr. uniaxiale) .	107
2.29	Comparaison des résultats analytiques et EF (réf. gonflée ; traction/compr.)	107
3.1	Construction du repère orthonormé attaché à la géométrie . . . . .	112
3.2	Géométrie du DIV : représentation des contours de l'AF et du NP . . . . .	113
3.3	Représentation de la géométrie de l'AF dans le plan transverse . . . . .	114
3.4	Représentation de la géométrie finale du DIV sous ABAQUS . . . . .	114
3.5	Analyse de convergence du maillage sur un quart de DIV . . . . .	115
3.6	Représentation du maillage du DIV complet sous ABAQUS . . . . .	115
3.7	Amplitude du déplacement au cours de l'étape d'initialisation . . . . .	118
3.8	Variation de volume au cours de l'étape d'initialisation dans le plan sagittal	119
3.9	Distribution de la pression à l'intérieur du NP . . . . .	119
3.10	Comparaison des résultats EF et expé. pour quelques jeux de paramètres .	125
3.11	Influence de la position sur le déplacement postéro-latéral . . . . .	126
3.12	Critère de distance en fonction des paramètres matériau de l'AF . . . . .	127
3.13	Distribution du déplacement total (amplitude) . . . . .	128
3.14	Comparaison des résultats EF et expé. pour le jeu de paramètres retenu . .	129
3.15	Influence de $C_0^*$ sur le comportement en compression du DIV . . . . .	132
3.16	Influence de $\chi$ sur le comportement en compression du DIV . . . . .	133
3.17	Influence de $\phi_{0,f}$ sur le comportement en compression du DIV . . . . .	134
3.18	Influence de $C_0^*$ et $\chi$ sur la réponse en force selon l'état d'hydratation . . .	135
3.19	Définition des translations et des rotations dans le repère du DIV . . . . .	137
3.20	Photographie du montage expérimental . . . . .	139
3.21	Illustration des différents modes de chargement . . . . .	140
3.22	Schéma représentant la démarche lors de l'étude des mouvements couplés .	141
3.23	Allure de la déformée du DIV en compression . . . . .	142
3.24	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en compression . . . . .	143
3.25	Mouvements couplés induits par compression (EF) . . . . .	144
3.26	Amplitude des mouvements couplés induits par compression (EF vs. expé.)	144
3.27	Allure de la déformée du DIV en flexion . . . . .	145
3.28	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en flexion . . . . .	146
3.29	Mouvements couplés induits par flexion (EF) . . . . .	146
3.30	Amplitude des mouvements couplés induits par flexion (EF vs. expé.) . . .	147
3.31	Allure de la déformée du DIV en extension . . . . .	148

3.32	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en extension . . . . .	149
3.33	Mouvements couplés induits par extension (EF) . . . . .	150
3.34	Amplitude des mouvements couplés induits par extension (EF vs. expé.) . .	150
3.35	Allure de la déformée du DIV en inclinaison latérale droite . . . . .	151
3.36	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en inclinaison latérale (droite)	152
3.37	Mouvements couplés induits par inclinaison latérale droite (EF) . . . . .	152
3.38	Amplitude des mouvements couplés induits par inclinaison lat. (EF vs. expé.)	153
3.39	Allure de la déformée du DIV en torsion . . . . .	154
3.40	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en torsion . . . . .	155
3.41	Mouvements couplés induits par torsion (EF) . . . . .	155
3.42	Amplitude des mouvements couplés induits par torsion (EF vs. expé.) . . .	156
3.43	Allure de la déformée du DIV en cisaillement antérieur . . . . .	156
3.44	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en cisaillement antérieur .	157
3.45	Mouvements couplés induits par cisaillement antérieur (EF) . . . . .	158
3.46	Amplitude des mouvements couplés en cisaillement antérieur (EF vs. expé.)	158
3.47	Allure de la déformée du DIV en cisaillement postérieur . . . . .	159
3.48	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en cisaillement postérieur .	160
3.49	Mouvements couplés induits par cisaillement postérieur (EF) . . . . .	160
3.50	Amplitude des mouvements couplés en cisaillement postérieur (EF vs. expé.)	161
3.51	Allure de la déformée du DIV en cisaillement latéral . . . . .	162
3.52	Comparaison des résultats EF et expérimentaux en cisaillement latéral . . .	163
3.53	Mouvements couplés induits par cisaillement latéral (EF) . . . . .	164
3.54	Amplitude des mouvements couplés en cisaillement latéral (EF vs. expé.) .	164

## Tableaux

1.1	Intervalle et moyenne des dimensions géométriques principales du DIV . . .	9
1.2	Données géométriques disponibles dans les modèles de DIV . . . . .	23
1.3	Lois de comportement et propriétés matériau pour les PC . . . . .	26
1.4	Lois de comportement et propriétés matériau pour l'AF . . . . .	28
1.5	Lois de comportement et propriétés matériau pour l'AF (suite) . . . . .	29
1.6	Lois de comportement et propriétés matériau pour le NP . . . . .	30
1.7	Lois de comportement et propriétés matériau pour le NP (suite) . . . . .	31
1.8	Conditions de chargement imposées dans les modèles EF . . . . .	34
1.9	Conditions de chargement imposées dans les modèles EF (suite) . . . . .	35
2.1	Correspondance entre les variables ABAQUS dans UHYPER et leur définition	73
3.1	Répartition du nombre d'éléments composant le maillage du DIV complet .	116
3.2	Variables du modèle de gonflement (référence gonflée), application au NP .	120
3.3	Paramètres matériau $C_{10}$ , $k_1$ , $k_2$ pour l'AF selon la littérature . . . . .	123
3.4	Influence des paramètres d'entrée du « noyau central » . . . . .	136
3.5	Chargements et amplitudes des mouvements appliqués dans les simulations	138
3.6	Capacité du modèle à prédire les tendances expérimentales 1 . . . . .	166
3.7	Capacité du modèle à prédire les tendances expérimentales 2 . . . . .	167



# Introduction générale

Le disque intervertébral (DIV) est la structure fibro-cartilagineuse comprise entre deux vertèbres consécutives, comme le montre la Figure 1. Il est composé de trois constituants principaux : le *Nucleus pulposus* (NP) amortissant au centre, l'*Annulus fibrosus* (AF) à sa périphérie, et les plateaux cartilagineux qui encadrent le tout. Chacune de ces structures est principalement composée d'eau, de collagène et d'une matrice extracellulaire. Le rôle mécanique du DIV est à la fois d'assurer la mobilité et la flexibilité du rachis tout en absorbant les chocs. Cependant, suite au vieillissement ou à un processus pathologique, le DIV (et plus particulièrement son NP) subit un phénomène de dégradation progressive appelé « dégénérescence discale ». Celle-ci est caractérisée par de sévères changements dans l'aspect macroscopique et la composition (perte d'eau importante, notamment), entraînant une profonde altération des fonctions mécaniques du DIV.

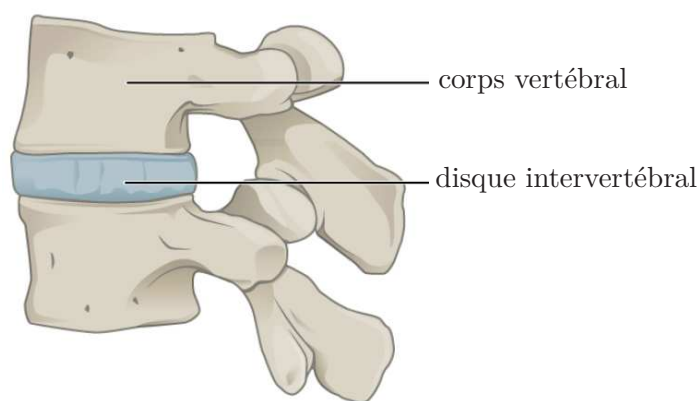


FIGURE 1 – Schéma d'un segment lombaire en vue latérale illustrant l'emplacement du DIV entre les corps vertébraux supérieur et inférieur. Illustration adaptée de [OpenStax College \(2013\)](#).

Dans le contexte de la reconstruction tissulaire du DIV, des hydrogels (voir Figure 2) peuvent être utilisés comme matériau de remplacement du NP dégradé. Les hydrogels sont des matériaux formés de deux ingrédients : un réseau tridimensionnel de longues chaînes de polymère connectées entre elles au niveau des points de réticulation et de l'eau (solvant). De nos jours, la recherche tente d'associer des hydrogels à des cellules souches pour la réalisation de greffes hybrides mi-synthétiques mi-biologiques pour remplacer le tissu lésé. L'enjeu porte à la fois sur le développement de biomatériaux injectables, de sorte que l'acte chirurgical soit le moins invasif possible, mais aussi sur les propriétés que doivent posséder ces matériaux pour que la fonction mécanique du DIV soit préservée, au moins pendant



la phase de prolifération des cellules.

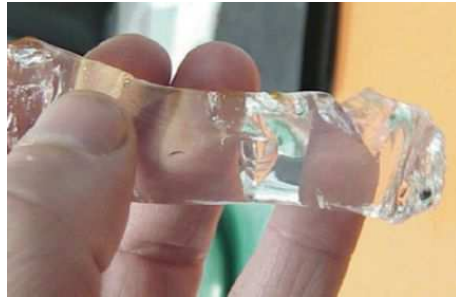


FIGURE 2 – Hydrogel pour la réalisation de matrices extracellulaires synthétiques. Photographie issue de [Weiss \(2007\)](#).

Le présent travail de thèse est mené en collaboration avec le Laboratoire d'Ingénierie Ostéo-Articulaire et Dentaire (LIOAD) de Nantes dans le cadre du programme BIOREGOS (« **B**iomatériaux et **R**égénération **O**stéo-Articulaire ») II, dont l'un des axes scientifiques de recherche est la régénération du *Nucleus pulposus*. L'objectif général de ce travail de thèse est de contribuer à une meilleure compréhension du comportement du DIV, et plus spécifiquement du NP, afin d'aider à l'élaboration de matériaux de remplacement, de type hydrogel. Pour cela, plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Réaliser une revue bibliographique sur le DIV pour comprendre son comportement mécanique - notamment les phénomènes physiques qui ont lieu et leurs temps caractéristiques - et les stratégies de modélisation utilisées pour décrire ce comportement ;
2. Comprendre les lois de comportement utilisées pour les gels en général, et proposer des améliorations si nécessaire ;
3. Développer un modèle générique de DIV qui intègre les lois de comportement précédentes.

Le premier chapitre de ce manuscrit dresse le cadre général de l'étude et s'intéresse à la description du DIV, depuis les aspects anatomiques et physiologiques jusqu'aux aspects mécaniques. Un intérêt particulier est porté sur les modèles Eléments Finis existants et les lois de comportement utilisées : le grand nombre de modèles ainsi qu'une très grande disparité dans les paramètres matériau sont mis en évidence. En outre, l'analyse de la littérature révèle l'importance de la diffusion des molécules d'eau à l'intérieur du NP, induisant un gonflement remarquable de ce dernier, phénomène qui ne peut être décrit par une approche poroélastique classique. Dès lors, une approche originale est proposée : le recours à des modèles de gonflement de type « gel » pour décrire le comportement du NP.

Dans le second chapitre, un modèle de type « gel » couplant grandes déformations et diffusion est proposé. Deux aspects nouveaux sont examinés : la prise en compte d'une dépendance explicite de la raideur du matériau au niveau de gonflement, et la prise en compte d'un état de référence préalablement gonflé. Dans les deux cas, les aspects théoriques et la mise en œuvre numérique sont développés, et des exemples d'application simples sont traités pour illustrer le fonctionnement du modèle.

Dans le troisième et dernier chapitre, un modèle complet de DIV est proposé. Celui-ci est fondé sur une géométrie générique représentative d'un DIV lombaire moyen, et

intègre les lois de comportement précédemment développées. Une étude approfondie de son comportement en compression et sous divers cas de chargement est menée afin d'observer l'influence des paramètres matériau d'un noyau hydrogel sur la cinématique du DIV. Les capacités prédictives du modèle, en terme de cinématique et de variation de pression intradiscale, sont discutées.



# Chapitre 1

## Anatomie, mécanique et modélisation du disque intervertébral

Ce premier chapitre présente le cadre général de l'étude. Une description anatomique et fonctionnelle de la colonne vertébrale et de ses éléments constitutifs est proposée. Un intérêt particulier est porté sur le disque intervertébral : sa structure et sa composition sont présentées dans le but de dresser une relation avec son comportement mécanique. Le problème de la dégénérescence du disque intervertébral et ses conséquences sur son comportement mécanique est également abordé. La seconde partie de ce chapitre propose une revue la plus complète possible des modèles pour le disque intervertébral. Nous concluons ce premier chapitre par la présentation des objectifs de l'étude et des méthodes mises en place.

## Sommaire

---

<b>1.1 Le disque intervertébral</b>	<b>6</b>
1.1.1 De la colonne vertébrale au disque intervertébral	6
1.1.2 Anatomie et physiologie du disque intervertébral sain	9
1.1.3 Comportement mécanique du disque intervertébral sain	12
1.1.4 Le problème de la dégénérescence discale	15
1.1.5 Bilan	21
<b>1.2 Modélisation du disque intervertébral</b>	<b>21</b>
1.2.1 Géométrie	22
1.2.2 Lois de comportement et propriétés matériau	24
1.2.3 Chargement	32
1.2.4 Bilan	36
<b>1.3 Objectifs et Méthodes</b>	<b>36</b>
1.3.1 Objectif : une meilleure compréhension du comportement mécanique	36
1.3.2 Idées et méthodes : utilisation d'un modèle de type « gel »	38
<b>1.4 Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## 1.1 Le disque intervertébral

### 1.1.1 De la colonne vertébrale au disque intervertébral

La colonne vertébrale, ou le rachis, est un élément de charpente indispensable du corps humain. Elle est composée de 24 vertèbres libres, dont 7 vertèbres cervicales (C1 à C7) qui constituent le cou, 12 vertèbres thoraciques (T1 à T12) qui constituent le haut du dos et 5 vertèbres lombaires (L1 à L5) qui constituent le bas du dos. On compte également 8 ou 9 vertèbres soudées formant le sacrum (S1 à S5) et le coccyx (composé de 3 ou 4 vertèbres). La Figure 1.1 illustre cette description. A l'exception des vertèbres sacro-coccygiennes soudées, les vertèbres sont liés deux à deux par un disque intervertébral (DIV), comme le montre la Figure 1.2, et par un ensemble de muscles et de ligaments. On compte au total 23 DIV qui représentent environ 25 % de la hauteur de la colonne vertébrale ([Shankar et al., 2009](#)).

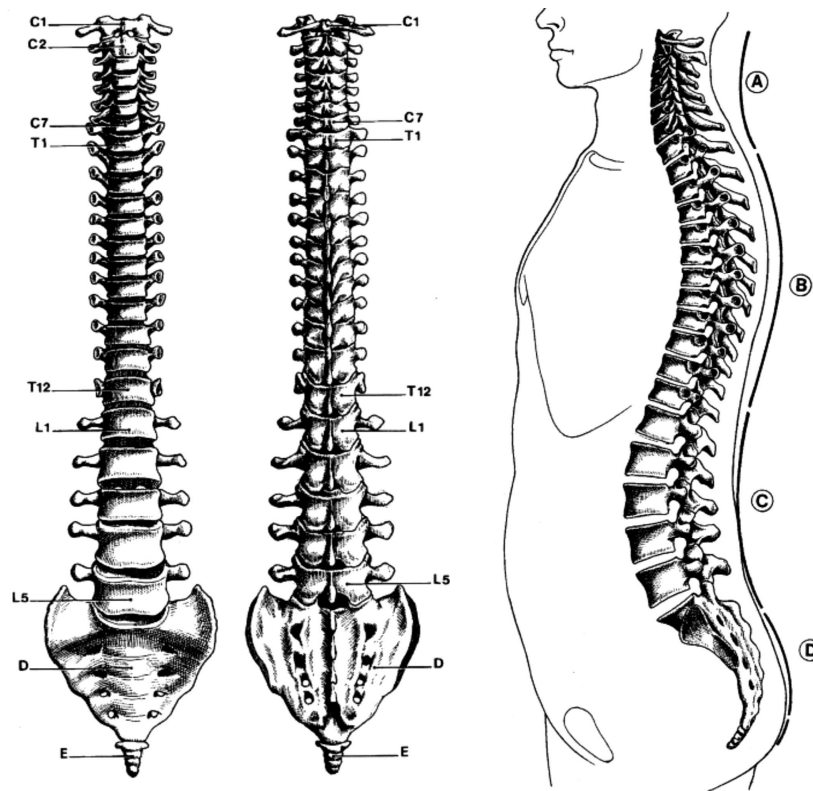


FIGURE 1.1 – Vues de face, dos et profil de la colonne vertébrale. (A) vertèbres cervicales, (B) vertèbres thoraciques, (C) vertèbres lombaires, (D) vertèbres sacro-coccygiennes. Illustration issue de [Marcovschi Champain \(2008\)](#).

Le rôle mécanique de la colonne vertébrale est de supporter la tête et l'ensemble du squelette, transmettre les charges aux membres inférieurs via le bassin tout en absorbant les chocs, et assurer à la fois la stabilité et la flexibilité du corps humain. La colonne vertébrale autorise une large gamme de mouvement, qu'il est d'usage de décrire dans les plans anatomiques de référence (Figure 1.3) : flexion-extension (i.e. rotation dans le plan sagittal), inclinaison latérale (rotation dans le plan frontal), torsion (rotation autour de

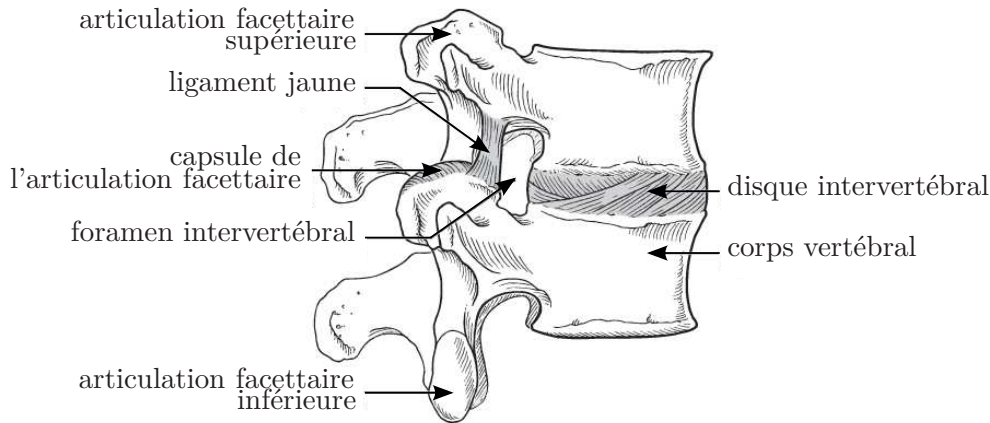


FIGURE 1.2 – Schéma d'un segment lombaire en vue latérale illustrant l'emplacement du DIV entre les corps vertébraux supérieur et inférieur, ainsi que les éléments anatomiques remarquables. Illustration adaptée de [Harris et al. \(1997\)](#).

l'axe vertical). L'amplitude de ces mouvements est variable selon les individus (selon le sexe, l'âge, la morphologie...) et suivant le niveau considéré. Elle est limitée par les muscles, les ligaments ainsi que par la géométrie particulière des vertèbres (rôle des articulations facéttaires). Pour le rachis lombaire complet, l'amplitude en flexion-extension est estimée à  $45^\circ$ ,  $20^\circ$  en inclinaison latérale et environ  $10^\circ$  en torsion ([Hamel, 2012](#)). Cependant, en raison de la complexité de sa structure et des conditions physiologiques de chargement, et de la difficulté de la mise en place de techniques d'études, l'état des connaissances sur la biomécanique *in vivo* de la colonne lombaire reste relativement limité. Le lecteur intéressé pourra néanmoins se référer au travail de doctorat de [Wang \(2012\)](#) ainsi qu'aux travaux de [Ochia et al. \(2006\)](#) ou [Xia et al. \(2010\)](#) pour plus de détails concernant notamment les aspects cinématiques de la colonne lombaire *in vivo*. Les études réalisées *in vivo* présentent l'avantage de rendre compte des conditions physiologiques réelles auxquelles sont soumises les structures observées (notamment la prise en compte du chargement dû au poids du corps). En revanche, elles mettent également en évidence des problèmes de mouvements couplés : [Fujii et al. \(2007\)](#) ont notamment montré qu'un mouvement primaire du tronc en torsion axiale entraîne des mouvements secondaires couplés en flexion/extension et en inclinaison latérale (gauche ou droite).

La littérature rapporte également des études *ex vivo* réalisées sur des portions de rachis ou sur un simple segment vertébral (portion de colonne comprenant deux vertèbres consécutives et un DIV). Ces études permettent de s'affranchir de l'influence des muscles, des ligaments et éventuellement des éléments vertébraux postérieurs (articulations facéttaires), afin de pouvoir préciser la contribution du DIV au mouvement total. La Figure 1.4 présente les amplitudes du mouvement *ex vivo* pour les différents niveaux du rachis lombaire : en flexion-extension, l'amplitude est la plus importante entre L5 et S1 et décroît jusqu'à la jonction L2-L1 ; en inclinaison latérale, l'amplitude est la plus importante au niveau L3-L4 et limitée au niveau L5-S1 ; en torsion, l'amplitude est très réduite quel que soit le niveau considéré.

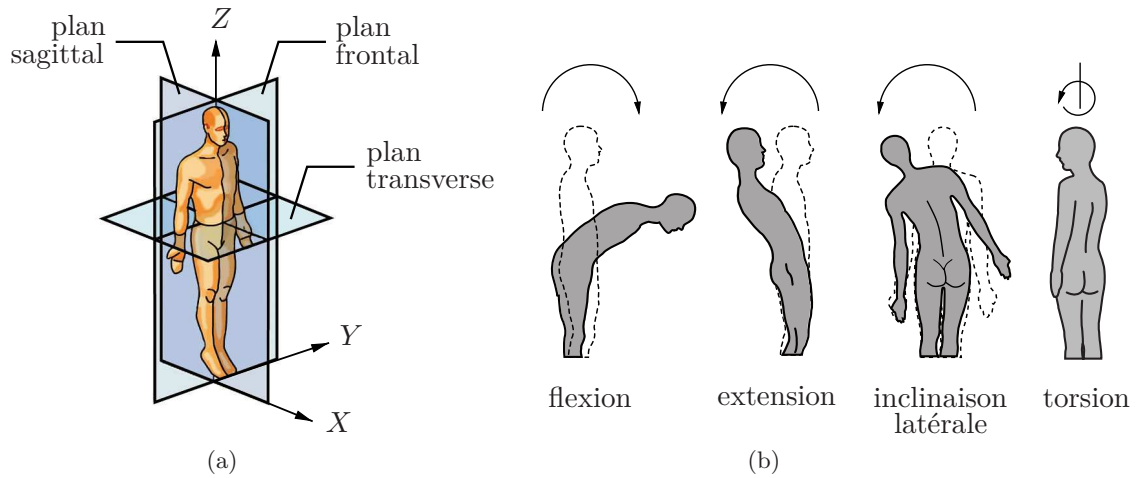


FIGURE 1.3 – (a) Plans anatomiques de référence; (b) Mouvements de la colonne vertébrale. Illustrations adaptées de [Karajan \(2009\)](#).

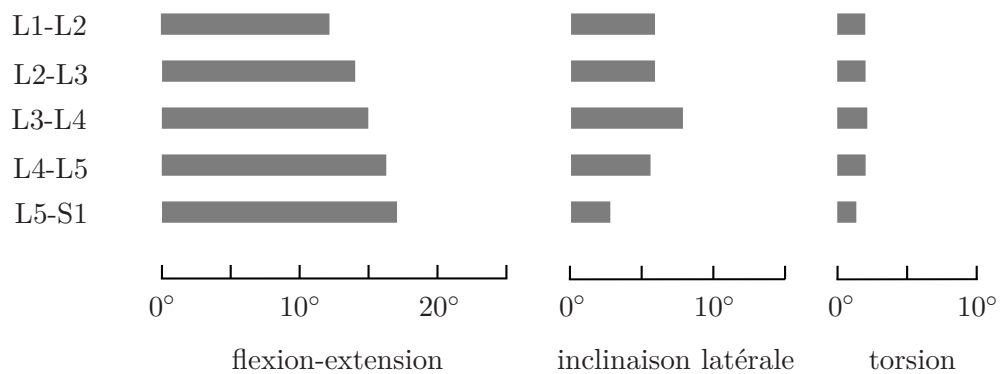


FIGURE 1.4 – Amplitudes de mouvement *ex vivo* en flexion-extension, inclinaison latérale et torsion selon le niveau lombaire. Illustration adaptée de [Ayturk \(2010\)](#).



### 1.1.2 Anatomie et physiologie du disque intervertébral sain

Le DIV, plus importante structure avascularisée du corps humain, est la partie fibro-cartilagineuse comprise entre deux vertèbres consécutives. Il est constitué de trois éléments principaux, présentés sur la Figure 1.5 : le **Nucleus pulposus** (NP) central, l'**Annulus fibrosus** (AF) à sa périphérie, et les **plateaux cartilagineux** (PC) qui s'intercalent entre les vertèbres et le DIV.

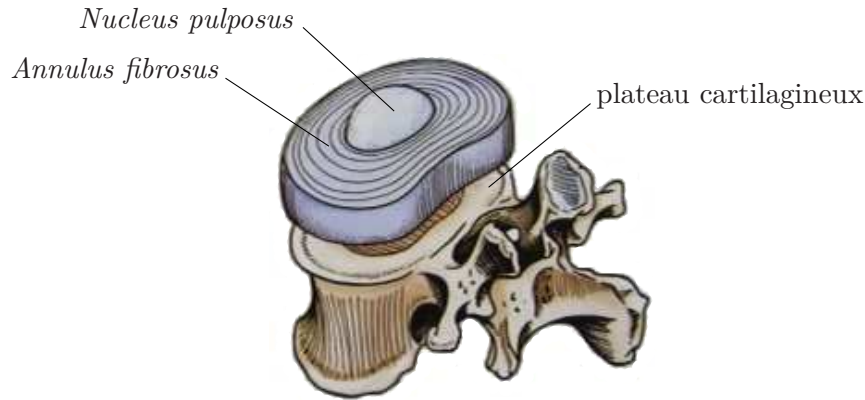


FIGURE 1.5 – Représentation des trois structures essentielles du DIV : le *Nucleus pulposus* au centre, l'*Annulus fibrosus* qui l'entoure et les plateaux cartilagineux. Illustration adaptée de Neumann (2010).

La géométrie du DIV est relativement simple, comparée à la géométrie des autres composants de la colonne vertébrale comme les vertèbres ou les ligaments. La forme du DIV est globalement cylindrique et correspond à celle des vertèbres qui l'encadrent. Elle dépend donc du niveau vertébral étudié, et varie selon les individus. Dans cette étude, nous nous intéressons plus particulièrement aux DIV de la région lombaire. La hauteur discale (antérieure, postérieure et dans le plan sagittal médian), le diamètre (antéro-postérieur et latéral), ainsi que l'angle formé par les plateaux vertébraux ont largement été étudiés à l'aide de diverses techniques d'imagerie médicale sur des panels de patients plus ou moins importants (Twomey et Taylor, 1985 ; Aharinejad *et al.*, 1990 ; Amonoo-Kuofi, 1991 ; Frobin *et al.*, 1997 ; Al-Hadidi *et al.*, 2001 ; Gocmen-Mas *et al.*, 2010 ; Eijkelkamp *et al.*, [nr](#))<sup>1</sup>. Le tableau 1.1, reproduit à partir du travail de Eijkelkamp *et al.* (2001), fournit les intervalles de valeurs possibles pour les dimensions géométriques principales, ainsi que les valeurs moyennes calculées.

	dimension	intervalle	moyenne
	diamètre latéral (mm)	35-63	50
	diamètre antéro-postérieur (mm)	27-45	35
	hauteur* (mm)	6-14	10
	angle (°)	6-14	-

TABEAU 1.1 – Intervalle et moyenne des dimensions géométriques principales du DIV.

Notes : \* - hauteur discale dans le plan sagittal.

1. Année non renseignée.

Le tissu intervertébral, autrement dit le tissu qui forme chacune des trois structures du DIV, est composé des constituants principaux suivants : une matrice extracellulaire composée majoritairement de protéoglycanes<sup>2</sup> et de fibres de collagène de type I et II<sup>3</sup>, des cellules spécialisées (responsables de la biosynthèse) et d'un fluide interstitiel composé d'eau, de gaz dissous et de petites protéines (Campana, 2004). La teneur et l'organisation de ces composants varient considérablement selon les différentes régions du DIV.

La description suivante s'attache aux caractéristiques morphologiques et physiologiques d'un DIV lombaire sain. Le comportement mécanique et les propriétés fonctionnelles du DIV, en lien avec sa composition et son organisation, seront exposés dans la section 1.1.3. La notion de dégénérescence discale et les changements induits seront abordés dans la section 1.1.4.



FIGURE 1.6 – Photographies d'un DIV sain en coupe, où l'on distingue le NP très hydraté et gélatineux au centre, et les lamelles de l'AF en périphérie. (a) Coupe transversale, d'après Little (2004) ; (b) Coupe sagittale, d'après Adams *et al.* (2009).

#### 1.1.2.1 Les plateaux cartilagineux

Les faces inférieure et supérieure du DIV forment les plateaux cartilagineux (PC). Leur forme est directement adaptée au corps vertébraux auxquels ils sont reliés (courbure visible dans le plan sagittal en Figure 1.6b). Ils possèdent une épaisseur comprise entre 0,6 mm et 1,6 mm (Shankar *et al.*, 2009 ; Clouet, 2010 ; Hamel, 2012) et sont légèrement plus minces au niveau du centre.

Les PC sont constitués de cartilage hyalin, cartilage le plus commun du corps humain d'apparence bleuâtre, translucide et vitreuse. En regard des corps vertébraux, la structure des PC est calcifiée. Le centre contient majoritairement des protéoglycanes et de l'eau,

2. Un protéoglycane est une macromolécule constituée d'une protéine centrale sur laquelle sont accrochés de nombreux glycosaminoglycanes (chaînes répétitives de disaccharides). Ces chaînes latérales ont une haute densité de charges négatives qui leur permettent d'attirer les molécules d'eau, leur conférant ainsi un fort caractère hydrophile.

3. Le collagène est une protéine composée de trois chaînes alpha polypeptidiques associées, reliées entre elles par des liaisons hydrogènes et des liaisons covalentes pouvant se combiner de différentes manières. Il existe donc plusieurs types de collagènes, chacun possédant une structure propre et intervenant dans des organes particuliers.

tandis qu'à sa périphérie, la teneur en collagène est plus importante, et sa structure devient plus fibreuse en regard du disque en raison des fibres de l'AF qui viennent s'y insérer.

Les PC sont un élément essentiel au bon fonctionnement physiologique du DIV, car ils servent de voie d'échange entre le corps vertébral et le NP (apport de nutriments, évacuation de déchets) du fait de leur perméabilité (Fromentin, 2005 ; Accadbled, 2007).

#### 1.1.2.2 L'Annulus fibrosus

L'Annulus fibrosus (AF) se situe à la périphérie du DIV et encercle le NP. Son épaisseur est plus importante dans le sens antérieur que dans le sens postérieur. L'AF est une structure très organisée, formée de plusieurs couches de lamelles concentriques, comme le montre la Figure 1.6a ou la Figure 1.7a. Le nombre de couches est variable selon les auteurs : 7 à 15 lamelles selon Rannou *et al.* (2000), 15-25 lamelles selon Shankar *et al.* (2009). Les couches de l'AF sont constituées de fibres de collagène, dont l'orientation alterne d'une couche à l'autre avec un angle de  $\pm 30^\circ$  environ par rapport au plan transverse (voir Figure 1.7). Des variations locales de l'angle d'orientation peuvent cependant être observées (Holzapfel *et al.*, 2005 ; Guerin et Elliott, 2006).

Macroscopiquement, il est possible de distinguer deux zones au sein de l'AF : une zone interne assez gélatineuse entourant directement le NP et dont la limite avec ce dernier est relativement floue, et une zone externe nettement plus fibreuse (voir Figure 1.6a).

La matrice extracellulaire de l'AF est synthétisée par des cellules de phénotype fibroblastique<sup>4</sup>. Les fibres de collagène qui composent l'AF sont majoritairement des fibres de type I, plus longues et plus organisées que les fibres de type II. La proportion de collagène I varie radialement au sein de l'AF : elle est importante dans l'AF externe, qui est donc plus fibreux et mieux organisé ; plus proche du NP, sa proportion est moins importante et l'AF est donc moins organisé (Eyre et Muir, 1976). La teneur en eau est d'environ 60 à 70 % pour un adulte d'âge moyen (Hamel, 2012).

#### 1.1.2.3 Le Nucleus pulposus

Le Nucleus pulposus (NP), emprisonné par l'AF, occupe une position centrale, légèrement décalée vers l'arrière. Dans le plan transverse, il occupe 50-60 % de la surface du DIV (Karajan, 2009).

Le NP est un matériau gélatineux, à l'aspect blanchâtre et brillant (voir Figure 1.6) possédant une forte teneur en eau estimée entre 70 et 90 % chez le jeune adulte (Jongeneelen, 2006 ; Karajan, 2009 ; Hamel, 2012).

La matrice extracellulaire du NP est synthétisée par des cellules présentant un phénotype assez similaire aux chondrocytes<sup>5</sup> articulaires. Le NP est composé presque exclusivement de protéoglycanes et d'un réseau lâche de petites fibres de collagène de type II, distribuées aléatoirement, de façon statistiquement homogène. La transition, en terme de composition, entre l'AF et le NP n'est pas brusque, elle se fait de façon graduelle.

---

4. Un fibroblaste est un type de cellule, souvent surnommée « cellule de soutien ». Les fibroblastes sont présents dans les nombreux tissus conjonctifs (ensemble de cellules de même constitution et exerçant une même fonction, à savoir servir de soutien et protéger les autres tissus corporels) et sont chargés de synthétiser les autres cellules formant le tissu conjonctif.

5. Les chondrocytes sont les cellules qui forment le cartilage. Ils participent à la formation du cartilage en synthétisant du collagène et des protéoglycanes.

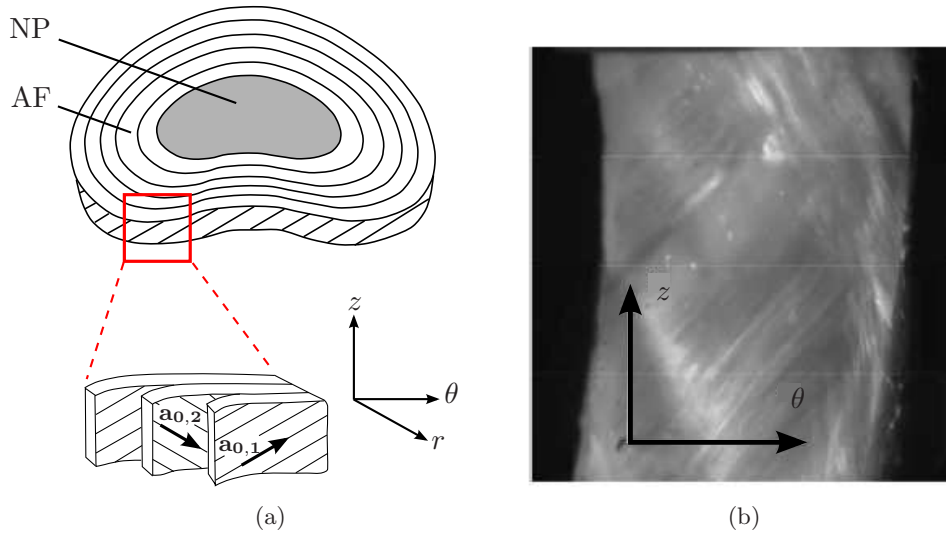


FIGURE 1.7 – Organisation lamellaire de l'AF. (a) Schéma d'un DIV montrant la direction d'orientation  $a_{0,1}$ ,  $a_{0,2}$  des fibres de collagène alternée entre deux couches successives, dans le repère local  $r, \theta, z$ . Schéma adapté de Elliott et Setton (2000) ; (b) Photographie d'un échantillon d'AF, d'après Guerin et Elliott (2006).

### 1.1.3 Comportement mécanique du disque intervertébral sain

Le DIV est un système mécanique complexe. Ce paragraphe s'attache à décrire en premier lieu le comportement mécanique des différents constituants du DIV, puis le comportement fonctionnel du DIV entier résultant de l'interaction de ces derniers. Il s'appuie principalement sur la description proposée par Karajan (2009) dans son travail de thèse ainsi que sur la revue bibliographique de Nerurkar *et al.* (2010).

#### 1.1.3.1 Comportement mécanique de l'*Annulus fibrosus*, du *Nucleus pulposus* et du tissu intervertébral

**Annulus fibrosus.** Le comportement mécanique de l'AF est étroitement lié à sa microstructure et à sa composition. Chaque lamelle étant composée de faisceaux de fibres alignées dans la même direction, elle possède un comportement isotrope transverse. De plus, étant donné que deux lamelles consécutives sont orientées de façon alternée et que le nombre de couches de lamelles est relativement important, ceci confère à la structure de l'AF un **comportement mécanique hautement anisotrope**. D'après les tests expérimentaux menés par Holzapfel *et al.* (2005), les propriétés mécaniques des lamelles de l'AF dépendent de la position spatiale et présentent une distribution similaire à celle des changements de composition au sein de l'AF, avec un AF externe plus résistant (présence de nombreuses et longues fibres de collagène de type I, peu de fibrilles de collagènes de type II) que l'AF interne (plus de petites fibres de collagène de type II, formant la transition avec le NP).

**Nucleus pulposus.** Le comportement mécanique du NP est au cœur de la fonction du DIV, puisque c'est lui qui procure à la colonne sa flexibilité. Comme pour l'AF, ce

comportement est également largement dicté par sa composition. En effet, la distribution statistiquement aléatoire des petites fibres de collagène de type II lui confère un **comportement isotrope**. En outre, la présence de protéoglycanes, molécules très hydrophiles, au sein de la matrice extracellulaire génère une pression osmotique considérable, permettant au NP de **s'imprégner d'eau et de gonfler**. Selon [Iatridis et al. \(1996\)](#), le NP présente à la fois les caractéristiques d'un fluide et d'un solide au sens viscoélastique. En effet, leurs expériences de relaxation de contrainte en cisaillement ont montré que la contrainte retrouve une valeur quasi-nulle après un certain temps (environ vingt minutes), ce qui est caractéristique du comportement d'un fluide viscoélastique. Dans des conditions dynamiques, cependant, les paramètres matériau obtenus pour le NP indiquent un comportement plutôt élastique (7-21 kPa pour le module complexe qui mesure la raideur en cisaillement, et 23-31° pour l'angle de phase qui mesure la dissipation interne).

**Tissu intervertébral.** Enfin, le tissu intervertébral est caractérisé par un comportement dissipatif dû à deux phénomènes : la présence de fluide interstitiel d'une part, et la viscosité intrinsèque de la matrice extracellulaire d'autre part. Il est à noter que ces phénomènes dissipatifs ont lieu à des échelles de temps différentes : quelques secondes concernant la viscosité intrinsèque de la matrice extracellulaire ([Iatridis et al., 1997](#)) contre plusieurs heures pour l'écoulement du fluide interstitiel ([Holmes et Hukins, 1996](#)).

### 1.1.3.2 Fonction mécanique globale du DIV

Comme il a été vu dans le paragraphe [1.1.1](#), le rôle mécanique du DIV est de transmettre la majeure partie du poids du corps vers le bas de la colonne vertébrale et les membres inférieurs, ainsi que d'en assurer la flexibilité et la stabilité. Le DIV est donc soumis quotidiennement à un chargement physiologique complexe dû non seulement au poids du corps et des charges portées mais aussi à l'activité musculaire qui entre en jeu dans le maintien du corps dans la position souhaitée.

[Nachemson et Elfstrom \(1970\)](#) puis [Wilke et al. \(1999, 2001\)](#) ont proposé d'étudier *in vivo* le chargement qui s'exerce sur le DIV dans différentes postures du quotidien. La Figure [1.8](#) montre la variation de la pression intradiscale en fonction de différentes postures ou exercices quotidiens usuels. La pression intradiscale est normalisée par rapport à la position debout (sans charge extérieure supplémentaire), considérée comme position de référence. Dans cette position, la valeur de la pression intradiscale mesurée est de 0,5 MPa selon les deux études. Il est alors montré que la pression intradiscale dépend du type d'exercice, du chargement extérieur et de l'activité musculaire. En effet, le port de charges supplémentaires entraîne logiquement une augmentation de la pression intradiscale, tandis que la position couchée sur le dos est la position qui favorise le repos discal avec une diminution de la pression d'environ 75 % par rapport à la position de référence. Si il y a globalement une bonne corrélation entre les mesures effectuées par les deux auteurs sur une grande partie des postures étudiées, l'influence de la position assise sur la pression est plus controversée, puisqu'elle a tendance à faire augmenter cette dernière de 40-50 % selon [Nachemson et Elfstrom \(1970\)](#) mais aurait peu d'influence selon [Wilke et al. \(1999\)](#). L'absence de données expérimentales supplémentaires est due aux difficultés et aux risques à la fois éthiques et pratiques inhérents à la mise en place de tels protocoles d'essais *in vivo*.

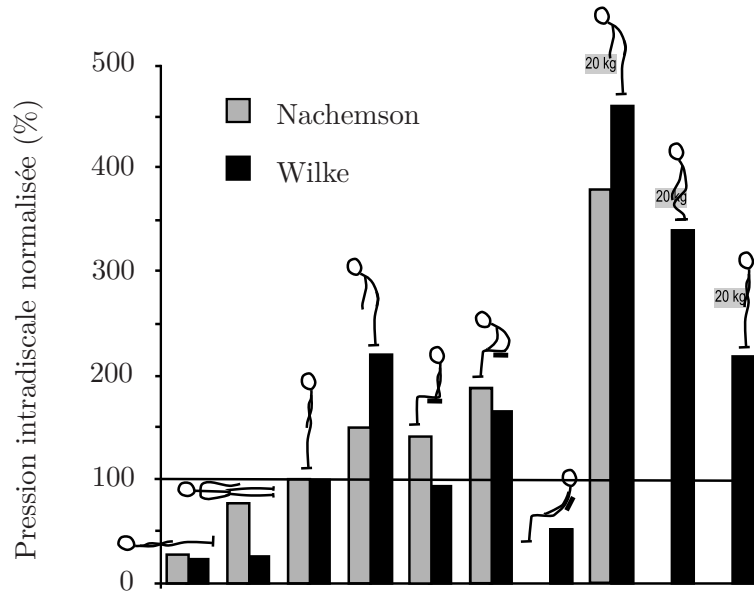


FIGURE 1.8 – Variation de la pression intradiscale normalisée par rapport à la position debout en fonction de la posture. Figure adaptée de [Wilke \*et al.\* \(1999\)](#).

Le fonctionnement mécanique du DIV au quotidien peut être observé à deux échelles de temps : l'échelle des temps courts et l'échelle des temps longs.

A l'échelle des temps courts (quelques secondes, voire quelques minutes), le DIV peut être soumis à des chargements de forte amplitude (levage brusque d'une charge par exemple). Grâce à l'interaction entre un NP très hydraté et un AF fortement renforcé par des fibres, le DIV est capable de supporter un chargement important. En effet, sous chargement mécanique, le DIV se déforme et le NP est mis sous pression grâce à sa forte résistance à la compression volumétrique. Le gonflement du NP est contraint axialement par la présence des PC rigides et radialement par la présence de l'AF. En l'absence de ces contraintes géométriques, le NP est libre de gonfler. La Figure 1.9 montre ainsi que l'ouverture du disque permet au NP de sortir du plan de coupe. Sous l'action du gonflement du NP, les longues fibres de collagène I de l'AF travaillent en traction. Du fait de leur arrangement particulier, elles confèrent à l'AF une très bonne résistance à la pression exercée par le NP. Finalement, le DIV global possède une très bonne résistance à la compression. Il est d'ailleurs souvent qualifié d'absorbeur de chocs. La Figure 1.10 résume le principe de fonctionnement du DIV en réponse à un chargement mécanique de compression.

A l'échelle des temps longs (chargement physiologique quotidien normal, par exemple), le DIV subit un phénomène de fluage dû à l'écoulement de l'eau en dehors du NP. La perte d'eau entraîne une diminution de son volume, accompagnée d'une diminution de la pression hydrostatique à l'intérieur du NP de 13-36 % ([Adams \*et al.\*, 1996](#)). Dans ce cas, le NP ne réalise plus son rôle de répartiteur de pression et c'est l'AF qui doit supporter directement la charge compressive. Au cours d'un cycle diurne, on observe également un phénomène de fluage suivi d'un phénomène de réhydratation. En effet, soumis à une compression prolongée (dû notamment au poids du corps) pendant la journée, le NP peut perdre jusqu'à 20 % d'eau. Inversement, au repos, le NP est capable de réabsorber du fluide. La perte d'eau entraînant une perte de hauteur, ceci permet d'expliquer la variation de taille





FIGURE 1.9 – Illustration de la grande propension à gonfler d’un NP d’un DIV de bovin, après une coupe dans le plan transverse, d’après Schröder (2008).

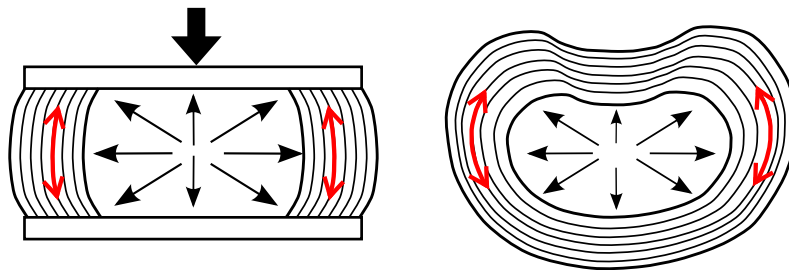


FIGURE 1.10 – Schéma illustrant le fonctionnement mécanique du DIV sous chargement de compression (flèche noire épaisse), dans le plan frontal ou sagittal à gauche et dans le plan transverse à droite. Le NP exerce une pression hydrostatique (symbolisée par les flèches noires fines) sur l’AF, dont les fibres sont placées en tension (flèches rouges).

d’un individu de plusieurs millimètres entre le début et la fin de la journée.

## 1.1.4 Le problème de la dégénérescence discale

### 1.1.4.1 Qu’est-ce que la dégénérescence discale ?

La dégénérescence discale est un processus de dégradation progressive du disque intervertébral au cours du temps. Elle peut prendre la forme d’un processus normal de vieillissement ou prendre une forme pathologique, lorsque la dégradation observée est particulièrement précoce et que le processus normal est accéléré. Dans les deux cas, les transformations observées au sein du DIV sont similaires, à l’échelle de temps près.

**Changements morphologiques et physiologiques.** La dégénérescence discale est caractérisée par de multiples changements morphologiques (hauteur, forme, couleur, aspect...), comme le montre la Figure 1.11 (en comparaison avec la Figure 1.6) et un changement de composition. Les principaux changements macroscopiques et changements de composition caractérisant un DIV dégénéré sont décrits ci-après. Pour une description anatomique, embryologique et physiologique complète de l’état du DIV pendant le processus normal de vieillissement (depuis la naissance jusqu’à l’âge de 70 ans), le lecteur pourra se référer aux travaux de Coventry *et al.* (1945), par exemple.

A l’échelle macroscopique, la dégénérescence se traduit par une forte diminution de la hauteur discale et un renflement important de l’AF vers l’extérieur (Zou *et al.*, 2009), ce

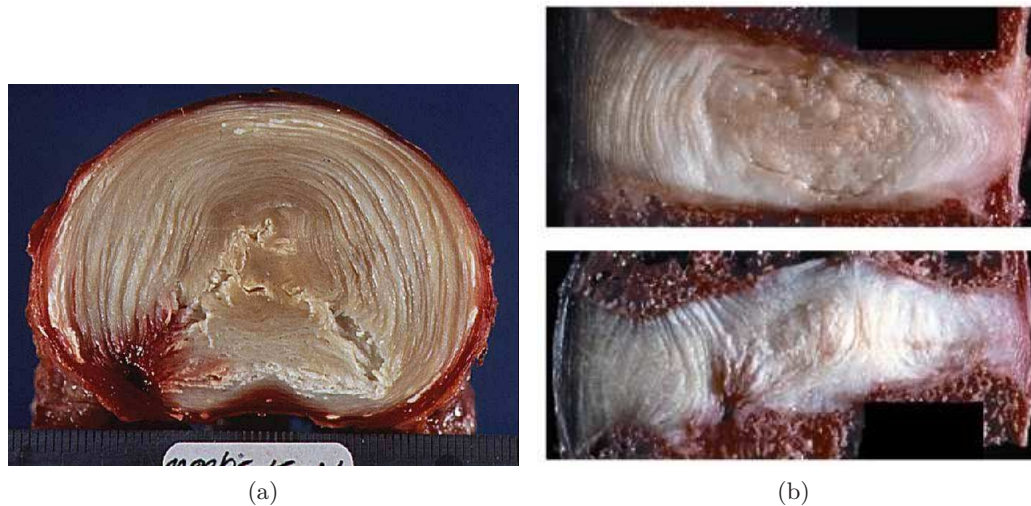


FIGURE 1.11 – Photographies d’un DIV dégénéré en coupe mettant en évidence un aspect général plus fibreux et plus sec, avec les lésions circonférentielles et des fissures radiales. (a) Coupe transversale, d’après [Little \(2004\)](#) ; (b) Coupe sagittale (en haut, début de la dégénérescence ; en bas, dégénérescence plus avancée), d’après [Adams \*et al.\* \(2009\)](#).

qui conduit les vertèbres à se tasser les unes sur les autres, comme on peut le voir sur la Figure 1.13. La couleur du DIV change, traduisant un aspect général plus sec et plus fibreux (Figure 1.11). Le NP perd son aspect brillant et gélatineux au profit d’un aspect granuleux, et peut être le siège de fissures. Sa limite avec l’AF perd en netteté. Au sein de l’AF, la dégénérescence entraîne une désorganisation des lamelles pouvant conduire à un délaminage (espacement interlamellaire) et à l’apparition de fissures. Si ces fissures s’étendent radialement jusqu’à l’extrémité externe de l’AF, cela peut conduire à la hernie, c’est-à-dire la migration du NP hors de sa cavité au travers de l’AF, comme l’illustre la Figure 1.12. Les phénomènes inflammatoires qui accompagnent une hernie, notamment lorsque le NP extrudé vient comprimer la racine nerveuse, jouent un rôle considérable dans la survenue des symptômes douloureux liés à la dégénérescence discale.

L’ensemble des changements macroscopiques est induit par les changements de composition que subit le DIV. Lors de la dégénérescence, le DIV voit son taux de collagène de type I globalement augmenter ([Antoniou \*et al.\*, 1996](#)), tandis que son taux de collagène de type II décroît sévèrement, particulièrement dans le NP. Le collagène étant une molécule possédant une longue demi-vie, il est particulièrement sujet à des réactions chimiques complexes dont les produits modifient les propriétés structurales et mécaniques du réseau de fibres de collagène, ce qui rend le tissu plus fragile ([Colombini \*et al.\*, 2008](#)). Le NP connaît une forte diminution de son taux de protéoglycanes et, par conséquent, une perte d’eau importante ([Chagnon, 2009](#)).

**Classification de la dégénérescence.** Il existe plusieurs types de classification de la dégénérescence. La classification morphologique de Thomson ([Boos \*et al.\*, 2002](#)), qui décrit les modifications du DIV et des vertèbres adjacentes dans une coupe sagittale selon cinq grades de dégénérescence (Figure 1.13) est l’une des plus connues.



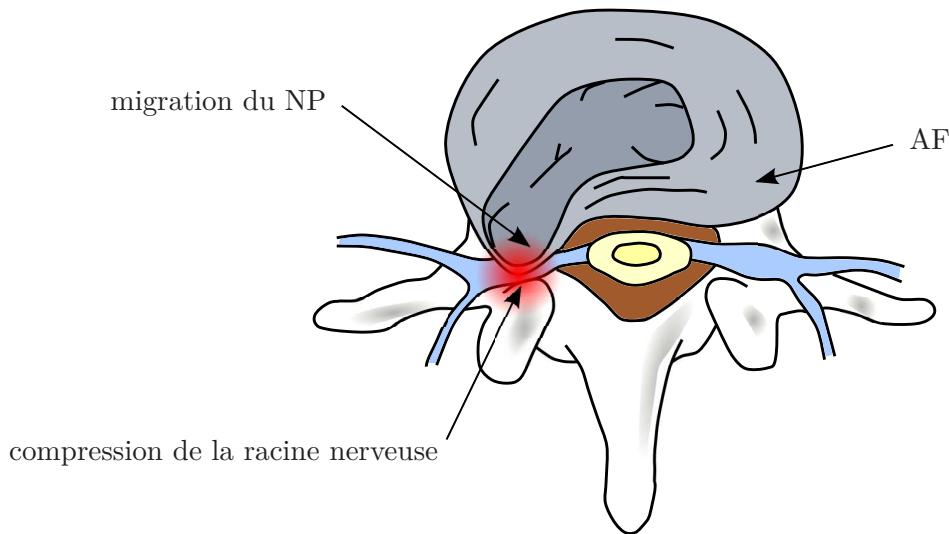


FIGURE 1.12 – Phénomène de hernie discale avec migration du NP à l’extérieur de son emplacement et compression du nerf sciatique.

**Comportement mécanique du disque intervertébral dégénéré.** Les changements de structure et de morphologie qui touchent le DIV à cause de la dégénérescence entraînent nécessairement une profonde altération de sa fonction mécanique. Une rigidification générale du DIV est observée (Umebara *et al.*, 1996).

D’un point de vue mécanique, le NP joue un rôle clé dans le déclenchement de la dégénérescence discale. En effet, le NP dégénéré n’est plus capable de retenir suffisamment d’eau à l’intérieur de sa cavité et de gonfler ; par conséquent, le NP n’est plus en mesure de générer la pression intradiscale nécessaire à la mise en tension des fibres de collagène de l’AF voisin. Le comportement mécanique de l’AF en est donc également altéré (Fujita *et al.*, 1997 ; Iatridis *et al.*, 1998 ; Guerin et Elliott, 2006) : le NP dégénéré n’assurant plus sa fonction de transfert de charge, ce dernier se fait directement des PC vers l’AF. L’AF subit donc une augmentation des charges compressives, alors que sa structure n’est pas initialement destinée à jouer ce rôle, ce qui favorise le délaminage entre les lamelles et la fissuration (Massey, 2009).

**Causes de la dégénérescence.** Les causes de la dégénérescence discale sont multiples. Il s’agit souvent d’une combinaison de mécanismes tels des problèmes de nutrition et d’accumulation de déchets due à la calcification et à la perte de perméabilité des PC ou des fractures au sein de la matrice extracellulaire sous l’action de charges mécaniques (Chagnon, 2009), notamment dus à la diminution de la densité cellulaire au cours du processus de dégénérescence, et donc à l’absence de réparation spontanée du DIV. Les facteurs à l’origine de ces mécanismes peuvent être de nature génétique ou environnementale - sollicitations mécaniques répétées ou au contraire immobilisation, exposition aux vibrations, traumatismes occasionnels, tabac (Urban et Roberts, 2003 ; Colombini *et al.*, 2008 ; Hadjipavlou *et al.*, 2008 ; Hamel, 2012).

**Conséquences.** On estime que la lombalgie, définie comme un état douloureux du rachis lombaire, touche de 12 à 42 % de la population mondiale au moins une fois au cours

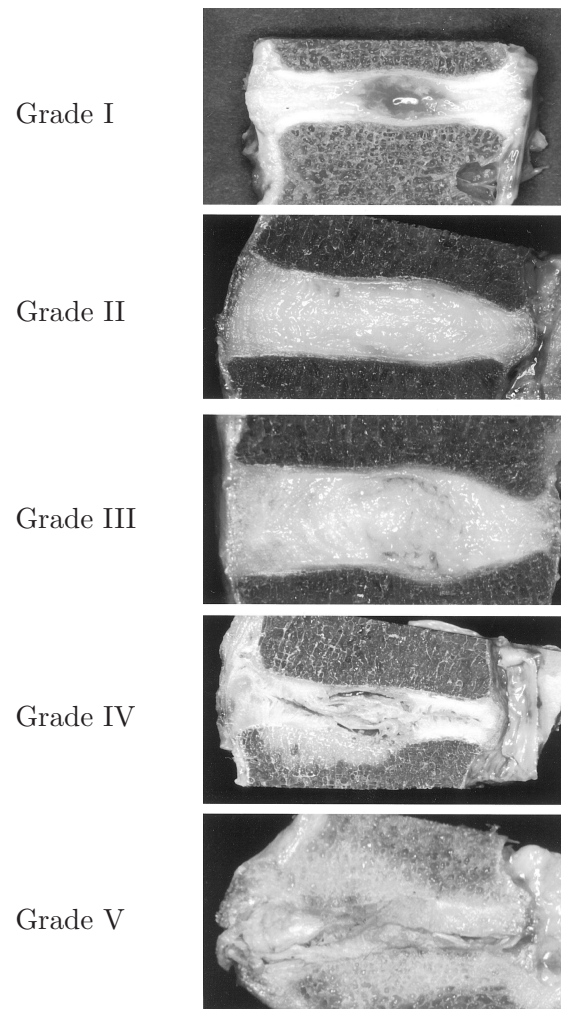


FIGURE 1.13 – Classification de la dégénérescence selon les grades de Thomson, basée sur la description des modifications du DIV et des vertèbres adjacentes dans une coupe sagittale (Boos *et al.*, 2002).

de la vie, et augmente avec le vieillissement (Hoy *et al.*, 2012). La controverse subsiste quant à la relation entre lombalgie et dégénérescence discale : dans environ 40 % des cas, un individu lombalgique présente des signes de dégénérescence discale avérée, mais une dégénérescence discale n'entraîne pas nécessairement des douleurs lombaires (Luoma *et al.*, 2000). La dégénérescence discale est néanmoins souvent reconnue comme l'un des facteurs sous-jacents de la lombalgie pouvant devenir chronique et invalidante.

#### 1.1.4.2 Remplacement et reconstruction du disque dégénéré

Clouet (2010) dans son travail de thèse et (Whatley et Wen, 2012) répertorient l'ensemble des traitements existants permettant la prise en charge des symptômes douloureux liés à la lombalgie, ainsi que les stratégies novatrices de reconstruction tissulaires.

Outre les traitements conventionnels (respect de règles hygiéno-diététiques, traitements médicamenteux), le recours à des traitements chirurgicaux est possible lorsque les traitements traditionnels s'avèrent insuffisants. Parmi les traitements chirurgicaux, on distingue l'arthrodèse, dont l'objectif est d'immobiliser l'articulation vertébrale en fusionnant deux vertèbres à l'aide d'un greffon osseux, et l'arthroplastie, technique qui consiste à remplacer le DIV dégénéré par une prothèse synthétique, l'enjeu étant de conserver la mobilité articulaire. Dans ce dernier cas, la prothèse peut être totale (remplacement du DIV entier) ou partielle (remplacement du NP dégradé), et peut être constituée de différents matériaux, comme le montre la Figure 1.14. Les hydrogels constituent une part importante des implants polymériques de NP en cours de développement. En effet, les hydrogels sont des matériaux capables d'absorber une grande quantité d'eau et ainsi de restaurer la hauteur discale du DIV non dégénéré ; de plus, leur comportement mécanique et leur composition présentent de grandes similitudes avec le NP (Joshi *et al.*, 2005, 2006 ; Strange et Oyen, 2012 ; Sasson *et al.*, 2012 ; Strange et Oyen, 2012 ; van den Broek *et al.*, 2012). En outre, on estime que le traitement du NP dans les stades précoces de la dégénérescence du DIV, où la NP est déshydraté mais l'AF est encore relativement épargné, peut limiter voire même empêcher davantage la dégénérescence de l'AF (Sharifi, 2012).

L'ensemble de ces solutions permet de traiter les symptômes en soulageant les douleurs liées à lombalgie mais présente l'inconvénient de ne pas s'intéresser directement à l'origine du problème, à savoir la dégénérescence discale (dans la majeure partie des cas). Les connaissances acquises autour du processus de dégénérescence discale permettent d'envisager de nouvelles stratégies thérapeutiques. Actuellement, la recherche s'oriente vers le développement de stratégies plus audacieuses basées sur l'ingénierie tissulaire. Cette discipline repose sur l'utilisation conjointe des connaissances en matière de biologie et d'ingénierie afin de proposer une médecine régénérative. L'enjeu est de pouvoir incorporer des cellules et/ou des agents thérapeutiques à des biomatériaux hybrides (mi-synthétiques, mi-biologiques) pour réparer les tissus lésés (Paesold *et al.*, 2007 ; Clouet, 2010 ; Endres *et al.*, 2010). A nouveau, grâce à leurs propriétés mécaniques, les hydrogels constituent d'excellents candidats comme matériau « support ». Ils permettent également d'offrir un environnement tridimensionnel approprié à la vie et à la prolifération des cellules (Boelen *et al.*, 2005 ; Cloyd *et al.*, 2007 ; Borges *et al.*, 2010, 2011).

Qu'ils soient utilisés comme implant ou dans l'ingénierie tissulaire, les hydrogels constituent un enjeu de développement majeur dans le traitement de la dégénérescence discale. Dans le second cas, la recherche s'attache à formuler des hydrogels possédant de bonnes

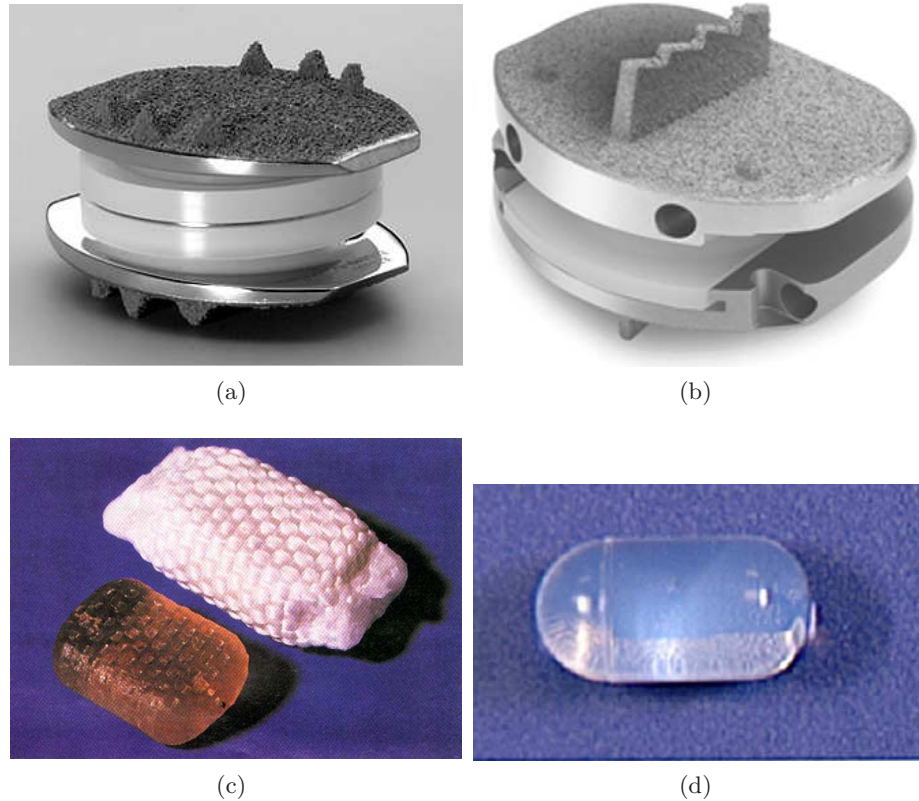


FIGURE 1.14 – Exemples de prothèse totale de DIV (a), (b) ou d'implant partiel de NP (c), (d). (a) Dispositif *SB Charité III*, fabriqué par la société Depuy Synthes, Johnson & Johnson (source photographique fabricant) ; (b) Dispositif *PRODISC-L*, fabriqué par Spine Solutions (source photographique fabricant) ; (c) Dispositif *PDN* ("*Prosthetic Device Nucleus*"), fabriqué par Raymedica (photographie issue de [Goins et al. \(2005\)](#)) ; (d) Dispositif *Aquarelle*, fabriqué par Stryker (photographie issue de [Goins et al. \(2005\)](#)).

propriétés d'injectabilité afin de permettre la mise en œuvre de chirurgies mini-invasives (Boyd et Carter, 2006).

### 1.1.5 Bilan

En comparaison avec les autres composants de la colonne vertébrale, le DIV possède une géométrie relativement simple, globalement cylindrique, plus ou moins ajustée aux vertèbres adjacentes. Cependant, du point de vue de la modélisation, il s'agit de la structure qui présente le plus d'enjeu, de par son caractère inhomogène qui induit une distribution inhomogène des propriétés mécaniques, et son comportement non-linéaire et couplé des matériaux en jeu, les nombreux phénomènes physiques qui interviennent ou peuvent intervenir - mécanique, diffusion, gonflement et écoulement, endommagement et fissuration - mais aussi sa tendance à évoluer au cours du temps. En outre, selon l'échelle de temps considérée, les phénomènes mécaniques mis en jeu diffèrent. Le NP se situe au cœur de l'enjeu puisqu'il est à la fois le premier à souffrir de la dégénérescence, mais il constitue aussi la clé vers des progrès dans le remplacement ou la reconstruction du DIV.

Afin d'aller vers une meilleure compréhension du comportement du DIV, la modélisation constitue un outil intéressant et fonctionnel pour étudier les aspects multi-physiques et multi-axiaux qui prennent place au sein du DIV. La section suivante se focalise à présent sur les modèles existants pour l'étude du DIV.

## 1.2 Modélisation du disque intervertébral

A l'heure actuelle, il existe deux principales approches numériques qui sont fréquemment utilisées pour simuler le comportement mécanique de la colonne vertébrale humaine et de ses éléments constitutifs (Karajan *et al.*, 2013) :

- l'approche discrète,
- l'approche par la Méthode des Eléments Finis.

Les groupes de recherche associée à la Science du Mouvement utilisent généralement des systèmes multi-corps discrets. Dans ce cadre, les vertèbres sont modélisées par des corps rigides qui sont reliés entre eux par des modèles rhéologiques couplant des éléments de type « ressort » et « amortisseur » ou des éléments de type « barres » ou « poutres » représentant les ligaments et le joint intervertébral (Lodygowski *et al.*, 2005 ; Shirazi-Adl, 2006). Cette approche présente l'avantage d'utiliser des composants « simples » assez peu coûteux en termes de temps de calcul. C'est pourquoi, généralement, la modélisation par éléments discrets est utilisée dans des simulations de l'ensemble du corps (ou d'une grande partie) pour lesquelles le coût de calcul est déjà par ailleurs suffisamment important. Pour les « connecteurs » comme le disque intervertébral, on souhaite seulement retranscrire correctement le comportement cinématique ou viscoélastique global et la raideur dans les différentes directions de l'espace. L'inconvénient de la représentation discrète est qu'elle ne permet pas d'accéder aux distributions locales des contraintes et des déformations au sein du tissu.

Les groupes de recherche d'orientation Mécanique des Milieux Continus utilisent souvent la Méthode des Eléments Finis. Dans ce cadre, la discrétisation continue de l'espace

permet de capturer, avec un degré de précision suffisamment fin, les champs de contrainte et de déformation ainsi que toute autre grandeur décrite dans la formulation du problème. Evidemment, l'inconvénient principal de cette méthode réside dans le fait que le nombre de degrés de liberté en jeu peut rapidement être important, cette tendance étant accentuée lorsque des modèles de plus en plus sophistiqués sont utilisés.

Dans la mesure où nous souhaitons accéder aux problèmes locaux et capturer certains effets multi-physiques prenant place au sein du DIV, cette section met l'accent sur la modélisation du DIV à l'aide de la Méthode des Eléments Finis. Les trois aspects importants d'un modèle Eléments Finis (EF) sont les suivants :

- la description géométrique,
- les propriétés mécaniques utilisées pour décrire les composants,
- le chargement.

### 1.2.1 Géométrie

La modélisation géométrique du disque intervertébral nécessite des données géométriques précises de l'objet réel étudié. Pour cela, différentes techniques d'imagerie peuvent être utilisées : scanners, tomographie, imagerie par résonance magnétique (IRM). Toutefois, il existe une grande variabilité des résultats selon les individus (selon le sexe, l'âge, la morphologie, le niveau vertébral étudié...) comme cela a été évoqué lors de la description anatomique du DIV, dans la section 1.1.2. Dès lors, la littérature sur la géométrie du DIV rapporte des données géométriques très disparates. Parmi la communauté de chercheurs qui travaillent sur les aspects de modélisation du DIV, on distingue deux types de modèles géométriques utilisés :

- les modèles spécifiques à un individu, directement basés sur les données issues de l'imagerie,
- les modèles génériques ou modèles plus ou moins simplifiés, supposés être statistiquement représentatifs d'un disque lombaire sain.

Dans les deux cas, la géométrie proposée distingue clairement les trois structures caractéristique : l'AF, le NP et les PC. Malgré tout, les données géométriques concernant les modèles sont rarement décrites dans la littérature ou alors incomplètes. Le tableau 1.2 répertorie les données disponibles sur la géométrie du DIV (section, longueurs caractéristiques, i.e. diamètre ou distance latérale et antéro-postérieure, hauteur moyenne ou hauteur antérieure et hauteur postérieure), du NP (section et diamètre) et des PC (épaisseur).

Géométrie		Données géométriques					Références
		DIV		NP		PC	
	section (mm <sup>2</sup> )	distance(s) caractéristique(s) (mm)	hauteur (mm)	section (% DIV)	diameter (mm)	épaisseur (mm)	
générique, 3D	-	40,8/29,4 <sup>b</sup>	9,5/11,5 <sup>c</sup>	-	-	-	Argoubi et Shirazi-Adl (1996)
	2000	-	8	40	-	1	Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
	1440	50/35 <sup>b</sup>	-	-	-	0,5	Denozière (2004) ; Denozière et Ku (2006)
	-	-/32,6 <sup>b</sup>	7,3/11,7 <sup>c</sup>	-	-	-	Ehlers <i>et al.</i> (2006a, b, 2009)
	-	45 <sup>a</sup>	12,5	-	-	0,5	Ferguson <i>et al.</i> (2004)
	-	-	13	3/7 <sup>d</sup>	-	-	Galbusera <i>et al.</i> (2011b)
	-	-	10	-	-	0,5	Kurutz et Oroszváry (2010) ; Yao et Gu (2006, 2007)
	-	50/33 <sup>b</sup>	10	-	-	1	Magnier (2009) ; Magnier <i>et al.</i> (2009)
	-	51/33 <sup>b</sup>	7/14 <sup>c</sup>	-	-	-	Prud'homme (2008)
	1256	45/34 <sup>b</sup>	7,76/16,64 <sup>c</sup>	28	-	0,5	Rohlmann <i>et al.</i> (2009)
1500	44/36 <sup>b</sup>	12	-	-	-	Schroeder <i>et al.</i> (2006, 2007) ; Schröder (2008) ; Schroeder <i>et al.</i> (2010)	
générique, 2D (transverse)	-	40/27 <sup>b</sup>	-	-	-	-	Iatridis <i>et al.</i> (2003)
générique, 2D axisymétrique	1925	24,5 <sup>a</sup>	10	30	14	0,5	Massey (2009)
	-	23 <sup>a</sup>	12	-	12	-	Meakin et Hukins (2001)
	-	28,1 <sup>a</sup>	11	-	14,9	-	Sélard <i>et al.</i> (2003)
	-	29,14 <sup>a</sup>	10,4	-	19,01	-	Silva <i>et al.</i> (2005)
	-	28,2 <sup>a</sup>	11	-	14,9	-	Soukane <i>et al.</i> (2005)
spécifique, 3D	-	40/27 <sup>b</sup>	-	-	-	1	Little (2004) ; Little <i>et al.</i> (2007a, b)
	-	-	-	3/7 <sup>d</sup>	-	-	Moramarco <i>et al.</i> (2010)
	1885	-	10,5	-	-	-	Natarajan et Andersson (1999)
	-	59/38,1 <sup>b</sup>	-	44	-	-	Schmidt <i>et al.</i> (2006)

TABEAU 1.2 – Données géométriques disponibles dans les modèles de DIV. Notes : <sup>a</sup> - diamètre, <sup>b</sup> - distance latérale/distance antéro-postérieure, <sup>c</sup> - hauteur postérieure/hauteur antérieure, <sup>d</sup> - ratio volumique entre le NP et le DIV.



**Remarque - Modélisation de la dégénérescence.** Certaines études mettant en œuvre des modèles Eléments Finis portent sur la dégénérescence discale et ses conséquences sur le comportement mécanique. Comme cela a été décrit dans la section 1.1.4.1, lors de la dégénérescence, le DIV connaît de profonds changements morphologiques. Il est donc nécessaire d'adapter la géométrie pour l'étude du DIV dégénéré. Plusieurs modifications sont classiquement utilisées pour représenter la dégénérescence :

- diminution de la hauteur discale (Argoubi et Shirazi-Adl, 1996 ; Natarajan et Andersson, 1999 ; Rohlmann *et al.*, 2006 ; Zander *et al.*, 2006 ; Schmidt *et al.*, 2007b, a, 2009 ; Zhang *et al.*, 2009b ; Chagnon, 2009 ; Chagnon *et al.*, 2010 ; Galbusera *et al.*, 2011a),
- diminution de la section du NP (Natarajan et Andersson, 1999) voire même nucléotomie (Argoubi et Shirazi-Adl, 1996),
- altération de l'AF par l'introduction de lésions (Argoubi et Shirazi-Adl, 1996 ; Little, 2004 ; Little *et al.*, 2007a, b), augmentation du renflement et création d'excroissances osseuses (ostéophytes) autour du DIV (Schmidt *et al.*, 2007b, a, 2009),
- modification de la courbure des PC (Schmidt *et al.*, 2007b, a, 2009).

### 1.2.2 Lois de comportement et propriétés matériau

De nombreux modèles ont été développés afin d'étudier le comportement mécanique du DIV. Les stratégies de modélisation sont variées et les modèles utilisés reposent sur des lois de comportement plus ou moins complexes.

Généralement, on constate que le degré de complexité des modèles évolue chronologiquement avec, d'une part, la progression des connaissances sur le DIV, et d'autre part, l'augmentation des performances des outils numériques (ordinateurs et codes de calcul). Le degré de complexité des modèles peut également être mis en parallèle avec la « taille » de l'objet modélisé : en effet, si l'on choisit de modéliser le DIV au sein d'un modèle entier de colonne lombaire, on préférera avoir recours à des lois de comportement plus simples (élastique linéaire, par exemple) pour ses composants, afin d'alléger le coût de calcul, déjà suffisamment important ; au contraire, si le DIV seul est au cœur du modèle, on utilisera des lois de comportement plus complexes nécessitant un temps de calcul plus conséquent. Pour illustrer ce propos, dans les tableaux récapitulatifs des sections suivantes, les modèles dont le DIV seul (et éventuellement une petite partie des corps vertébraux adjacents) est représenté seront signalés par le symbole \* à la suite de la référence concernée. Enfin, le degré de complexité des modèles dépend également du type d'étude menée et des phénomènes que l'on souhaite observer. En effet, les modèles simples comprenant une seule phase permettent d'accéder à la réponse mécanique instantanée (amplitude de mouvement, distribution des contraintes...). L'obtention d'une réponse transitoire avec ces modèles monophasiques est possible en ayant recours à des modèles viscoélastiques. Cependant, afin de pouvoir représenter l'écoulement de fluide interstitiel à l'intérieur du DIV, des modèles comprenant deux phases (minimum) sont nécessaires.

Le DIV étant une structure hétérogène, il est nécessaire de modéliser le comportement de chacune des structures qui le composent. Les lois de comportement utilisées, ainsi



que les paramètres matériau associés sont donc décrits ci-dessous pour les PC (section 1.2.2.1), l'AF (section 1.2.2.2) et le NP (section 1.2.2.3) respectivement. Dans les trois cas, les modèles sont classés par ordre de complexité, selon le nombre de phases représentées, comme le proposent Chagnon (2009) et Magnier (2009). On distingue :

- les modèles monophasiques, avec des lois de comportement élastiques linéaires, hyperélastiques, viscoélastiques,
- les modèles multiphasiques avec des lois de comportement poroélastiques, poroélastiques « étendues » incluant le gonflement osmotique et/ou les comportements chimique et électrique du DIV.

Dans les trois sections suivantes, les lois de comportement élastique et poroélastique (classique ou étendue) sont caractérisées par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour les modèles hyperélastique et porohyperélastique, les propriétés matériau incluent les coefficients  $C_{10}$  (formulation hyperélastique de type néo-Hooke),  $C_{10}$  et  $C_{01}$  (formulation hyperélastique de type Mooney-Rivlin), et éventuellement le coefficient de compressibilité  $D$  quelle que soit la formulation (dans le cas compressible).

#### 1.2.2.1 Plateaux cartilagineux

Le tableau 1.3 dresse la liste (certes non exhaustive mais néanmoins assez représentative) des modèles utilisés pour les plateaux cartilagineux, ainsi que les paramètres matériau associés disponibles dans la littérature.

Les PC sont modélisés au moyen d'une loi de comportement élastique linéaire ou poroélastique (incluant ou non les comportements osmotique, chimique, électrique). On remarque une très grande disparité parmi les valeurs des paramètres matériau. Le module d'Young  $E$  peut varier de quelques MPa à plus de 10000 MPa. Ceci s'explique par le fait que certains modèles traitent les PC comme l'os cortical, avec un module d'Young très important ( $> 10000$  MPa), d'autres les considèrent comme des matériaux homogènes avec des propriétés mécaniques réduites (500 – 1000 MPa) (Denozière, 2004). Le coefficient de Poisson  $\nu$  dans les modèles élastiques possède une valeur supérieure à 0,3, ce qui caractérise un matériau peu compressible, ce qui est effectivement le cas si l'on observe la réponse instantanée du matériau sous chargement. Au contraire, dans les modèles poroélastiques où l'on s'intéresse au comportement à long terme, le coefficient de Poisson est plus faible, ce qui témoigne d'un comportement plutôt compressible (écoulement de fluide sous un chargement en fluage).

#### 1.2.2.2 *Annulus fibrosus*, substance fondamentale et fibres

Les tableaux 1.4 et 1.5 résument les modèles et les paramètres matériau de la littérature pour l'*Annulus fibrosus*. L'AF est généralement vu comme un matériau composite constitué de la substance fondamentale (ou la matrice) et des fibres de collagène. A nouveau, le classement proposé rend compte de la complexité du modèle utilisé pour la matrice de l'AF : d'un comportement élastique linéaire à poro(hyper)élastique plus ou moins étendu, avec renfort de fibres au comportement linéaire ou non. On remarque d'ailleurs que, dans les modèles les plus complexes, le DIV seul (et non plusieurs segments lombaires) est modélisé. L'ordre de grandeur du module d'Young est de quelques MPa, tandis que le

Modèle		Propriétés matériau		Références
Monophasique	élastique linéaire	E (MPa)	$\nu$	
		20	0,3	Gonzalez Gutierrez (2012)*
		23,4	0,4	Yao <i>et al.</i> (2006)
		23,8	0,4	Goto <i>et al.</i> (2002) ; Lodygowski <i>et al.</i> (2005) ; Schmidt <i>et al.</i> (2006, 2007b, a, 2009) ; Ayturk (2010)
		23,8	0,46	Little (2004)* ; Little <i>et al.</i> (2007a, b)*
		24	0,4	Natarajan et Andersson (1999) ; Wang <i>et al.</i> (2000) ; Noailly <i>et al.</i> (2007)
		100	0,4	Kurutz et Oroszváry (2010)
		500	0,3	Zhang <i>et al.</i> (2009b)
		500	0,4	Robin <i>et al.</i> (1994)
		600	0,3	Peng <i>et al.</i> (2011)
		1000	0,4	Chen <i>et al.</i> (2008)
		2000, 6000, 12000 <sup>a</sup>	-	Denozière (2004) ; Denozière et Ku (2006)
		10000	0,3	Silva <i>et al.</i> (2005)*
		12000	0,3	Baroud <i>et al.</i> (2003) ; Kuo <i>et al.</i> (2010)
Multiphasique	poroélastique	5	0,1	Argoubi et Shirazi-Adl (1996)
		5	0,17	Malandrino <i>et al.</i> (2009, 2011)*
		10-23	0,4	Martinez <i>et al.</i> (1997)*
		20	0,1	Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
		20	0,4	Williams <i>et al.</i> (2007)
		330	0,25	Wu et Chen (1996)
		10000	0,2	Ferguson <i>et al.</i> (2004)*
	poroélastique + gonflement osmotique	5	0,1	Galbusera <i>et al.</i> (2011a)*
		5	0,17	Massey (2009)*
		490	0,4	Laible <i>et al.</i> (1993)
	poroélastique + chimique + électrique	25	0,1	Magnier (2009)* ; Magnier <i>et al.</i> (2009)*

TABEAU 1.3 – Lois de comportement et propriétés matériau utilisées dans les modèles Eléments Finis de disque intervertébral pour les plateaux cartilagineux. Notes : <sup>a</sup> - de l'intérieur vers l'extérieur, \* - modèle dont le DIV seul est représenté.

coefficient de Poisson est généralement supérieur à 0,45, traduisant un comportement quasi-incompressible, aussi bien à l'échelle des temps courts qu'à l'échelle des temps longs.

La prise en compte des fibres de collagène (et de leur orientation) se fait communément de deux façons (Jones et Wilcox, 2008). La première méthode consiste à modéliser les fibres à l'aide d'éléments discrets de type « barre » ou « ressort » disposés en réseau enchevêtré (avec un angle d'environ  $\pm 30^\circ$  par rapport au plan transverse) et intégrés dans le maillage de la substance fondamentale, comme le montre la Figure 1.15. La construction du réseau discret est assez fastidieuse et présente l'inconvénient de dépendre du maillage de la substance fondamentale. La seconde méthode repose sur une technique d'homogénéisation des propriétés du couple fibres/matrice (extra-fibrillaire) sous forme d'une loi de comportement anisotrope pour le comportement de l'AF à l'échelle macroscopique. Plusieurs modèles ont été développés récemment pour l'AF (Eberlein *et al.*, 2001 ; Peng *et al.*, 2006 ; Guo *et al.*, 2006 ; O'Connell *et al.*, 2009) et semblent satisfaisants au regard des données expérimentales.

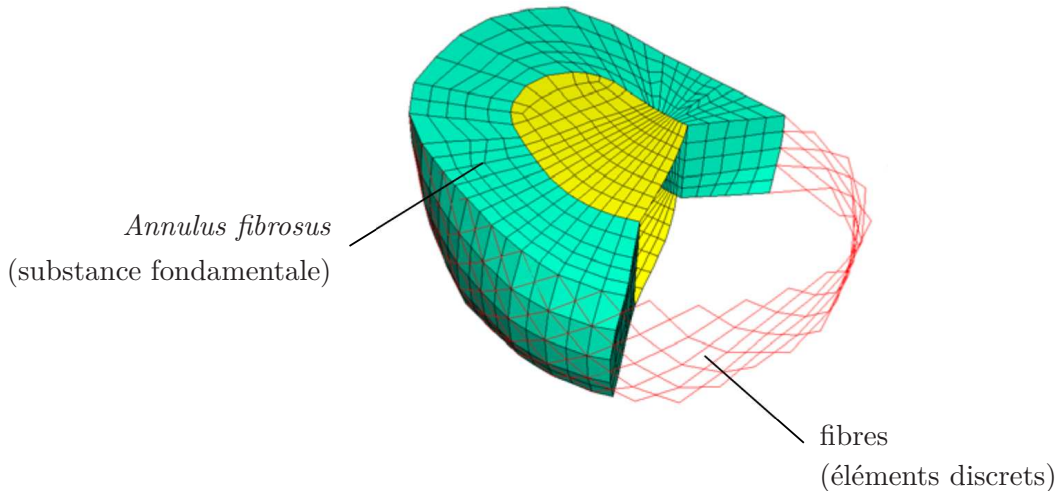


FIGURE 1.15 – Modélisation des fibres de l'AF à l'aide d'éléments discrets (barres ou ressorts). Illustration adaptée de Lodygowski *et al.* (2005).

### 1.2.2.3 *Nucleus pulposus*

Les tableaux 1.6 et 1.7 répertorient les types de modèles possibles utilisés pour le *Nucleus pulposus* dans la littérature. Le NP est représenté par un solide incompressible ou par un fluide incompressible, du fait de sa forte teneur en eau. Afin de pouvoir étudier l'écoulement du fluide interstitiel, une approche poroélastique, à nouveau plus ou moins enrichie, peut également être employée. La raideur (module d'Young ou module de cisaillement) varie de quelques centièmes de MPa à quelques MPa, tandis que le coefficient de Poisson, comme pour les PC, rend compte d'un comportement quasi-incompressible ( $\nu = 0,49$ ) dans les modèles élastiques où l'on s'intéresse à la réponse instantanée, et d'un comportement plus compressible dans les modèles poroélastiques où la réponse aux temps longs est privilégiée.

Modèle	Propriétés matériau					Références		
	Substance fondamentale					Fibres		
	E (MPa)	$\nu$	$C_{10}$ (MPa)	$C_{01}$ (MPa)	$D$ (MPa <sup>-1</sup> )	E (MPa)	$\nu$	
matrice élastique linéaire	1	0,48				500	0,35	<a href="#">Yao <i>et al.</i> (2006)</a>
	2	0,45				500	-	<a href="#">Robin <i>et al.</i> (1994)</a>
	2,56	0,4						<a href="#">Natarajan <i>et al.</i> (2004)</a>
	3,15	0,45				non-linéaire		<a href="#">Zander <i>et al.</i> (2006)</a>
	4	0,45				300/400/550 <sup>c</sup>	0,3	<a href="#">Kurutz et Oroszváry (2010)</a>
	4	0,4				45	-	<a href="#">Lodygowski <i>et al.</i> (2005)</a>
	4,2	0,45				175	-	<a href="#">Chen <i>et al.</i> (2001)</a>
	4,2	0,45				360/408/455/503/550 <sup>c</sup>	-	<a href="#">Ibarz <i>et al.</i> (2013)</a>
	4,2	0,45				360/420/485/500 <sup>c</sup>	0,3	<a href="#">Denozière (2004)</a> ; <a href="#">Denozière et Ku (2006)</a>
	4,2	0,45				non-linéaire		<a href="#">Natarajan et Andersson (1999)</a>
	4,2	-				360/550 <sup>c</sup>	0,3	<a href="#">Kuo <i>et al.</i> (2010)</a>
	4,2	0,45				500	0,3	<a href="#">Zhang <i>et al.</i> (2009b)</a>
	5	0,49				∅ fibre		<a href="#">Meakin et Hukins (2001)</a>
	8	0,45				360/420/485/500 <sup>c</sup>	0,3	<a href="#">Baroud <i>et al.</i> (2003)</a>
matrice hyperélastique			0,034 <sup>b</sup>		0,197 <sup>b</sup>	non-linéaire		<a href="#">Peng <i>et al.</i> (2006)</a>
			0,038 <sup>b</sup>					<a href="#">Guo <i>et al.</i> (2006)</a>
			0,1 <sup>a</sup>	0,025 <sup>a</sup>		non-linéaire		<a href="#">Gonzalez Gutierrez (2012)*</a>
			0,1 <sup>a</sup>	2,5 <sup>a</sup>	0,306 <sup>a</sup>	W exp. <sup>e</sup>		<a href="#">Moramarco <i>et al.</i> (2010)*</a>
			0,11 <sup>a</sup>	-0,1 <sup>a</sup>	0,09 <sup>a</sup>	W exp. <sup>e</sup>		<a href="#">O'Connell <i>et al.</i> (2009)</a>
			0,12 <sup>a</sup>	0,03 <sup>a</sup>		non-linéaire		<a href="#">Schmidt <i>et al.</i> (2007b)</a>
			0,18 <sup>a</sup>	0,045 <sup>a</sup>		non-linéaire		<a href="#">Schmidt <i>et al.</i> (2007a, 2009)</a>
			0,3448 <sup>b</sup>		0,3 <sup>b</sup>			<a href="#">Dreischarf <i>et al.</i> (2011)</a>
			0,348 <sup>b</sup>		0,3 <sup>b</sup>	croissant <sup>c</sup>		<a href="#">Rohlmann <i>et al.</i> (2006)</a>
			0,25 <sup>b</sup>			W exp. <sup>e</sup>		<a href="#">Eberlein <i>et al.</i> (2001, 2004)</a>
			0,56 <sup>a</sup>	0,14 <sup>a</sup>		non-linéaire		<a href="#">Schmidt <i>et al.</i> (2006)</a>
			1 <sup>b</sup>			hypoélastique		<a href="#">Noailly <i>et al.</i> (2007)</a>
			1 <sup>a</sup>	0,5 <sup>a</sup>		500	0,3	<a href="#">Little (2004)*</a>
						426 à 655	0,3	<a href="#">Little <i>et al.</i> (2007a, b)*</a>

TABEAU 1.4 – Lois de comportement et propriétés matériau utilisées dans les modèles de disque intervertébral pour l'*Annulus fibrosus*, la substance fondamentale et les fibres. Notes : <sup>a</sup> - formulation hyperélastique de type Mooney-Rivlin, <sup>b</sup> - formulation hyperélastique de type néo-Hooke, <sup>c</sup> - de l'intérieur vers l'extérieur, <sup>d</sup> - AF antérieur/AF latéral/AF postérieur, <sup>e</sup> - forme exponentielle de l'énergie de déformation  $W$  pour les fibres, \* - modèle dont le DIV seul est représenté.

	Modèle		Propriétés matériau					Références	
			Substance fondamentale			Fibres			
		E (MPa)	$\nu$	$C_{10}$ (MPa)	$C_{01}$ (MPa)	$D$ (MPa <sup>-1</sup> )	E (MPa)	$\nu$	
Multiphasique	matrice poroélastique	0,45	0,2						Silva <i>et al.</i> (2005)*
		1,42	0,45						Wu et Chen (1996)
		2,5	0,1				8	-	Argoubi et Shirazi-Adl (1996)
		2,5	0,1				viscoélastique		Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
		2,5	0,17				60	0,33	Ferguson <i>et al.</i> (2004)*
		2,5	0,4				non-linéaire		Williams <i>et al.</i> (2007)
		2,56	1,17						Malandrino <i>et al.</i> (2009)*
		4-8	0,45						Martinez <i>et al.</i> (1997)*
		17/22/30 <sup>d</sup>	0,45						Salem <i>et al.</i> (nr)* <sup>a</sup>
	matrice porohyper-élastique			0,56		5,4			Malandrino <i>et al.</i> (2011)
	poroélastique + gonflement osmotique	0,8	0,45						Laible <i>et al.</i> (1993)
		1,5					viscoélastique		Schroeder <i>et al.</i> (2006, 2007)* ; Schröder (2008)* ; Schroeder <i>et al.</i> (2010)*
		2	0,17				100	0,1	Massey (2009)*
	matrice porohyper-élastique + gonflement osmotique			0,5		0,67			Galbusera <i>et al.</i> (2011a)*
matrice poroélastique + chimique + électrique	1	0,1						Magnier (2009)* ; Magnier <i>et al.</i> (2009)*	
	2,25	0,48						Iatridis <i>et al.</i> (2003)*	
								Ehlers <i>et al.</i> (2006a, b, 2009)* ; Yao et Gu (2006, 2007)*	

TABLEAU 1.5 – Lois de comportement et propriétés matériau utilisées dans les modèles de disque intervertébral pour l'*Annulus fibrosus*, la substance fondamentale et les fibres (suite). Notes : <sup>a</sup> - formulation hyperélastique de type Mooney-Rivlin, <sup>b</sup> - formulation hyperélastique de type néo-Hooke, <sup>c</sup> - de l'intérieur vers l'extérieur, <sup>d</sup> - AF antérieur/AF latéral/AF postérieur, \* - modèle dont le DIV seul est représenté.

a. Année non renseignée.

Modèle	Propriétés matériau					Références
	E (MPa)	$\nu$	$C_{10}$ (MPa)	$C_{01}$ (MPa)	$D$ (MPa <sup>-1</sup> )	
Monophasique	élastique linéaire	0,1	0,499			Denozière (2004) ; Denozière et Ku (2006) ; Zhang <i>et al.</i> (2009b)
		0,2	0,499			Natarajan et Andersson (1999)
		1	0,499			Kuo <i>et al.</i> (2010)
		1	0,499			Kurutz et Oroszváry (2010)
		4	0,499			Robin <i>et al.</i> (1994)
	hyperélastique		0,066 <sup>a</sup>	0,016 <sup>a</sup>		Gonzalez Gutierrez (2012)*
			0,12 <sup>a</sup>	0,03 <sup>a</sup>		Baroud <i>et al.</i> (2003) ; Schmidt <i>et al.</i> (2007b, a, 2009) ; Noailly <i>et al.</i> (2007)
			0,12 <sup>a</sup>	0,09 <sup>a</sup>		Schmidt <i>et al.</i> (2006)
			0,16 <sup>b</sup>		0,024 <sup>b</sup>	Moramarco <i>et al.</i> (2010)*
	viscoélastique					Groth et Granata (2008)
		2	0,49			Wang <i>et al.</i> (2000)
	fluide incompressible					Meakin <i>et al.</i> (2001) ; Zander <i>et al.</i> (2001) ; Eberlein <i>et al.</i> (2001, 2004) ; Little (2004)* ; Lodygowski <i>et al.</i> (2005) ; Rohlmann <i>et al.</i> (2006) ; Shirazi-Adl (2006) ; Yao <i>et al.</i> (2006) ; Zander <i>et al.</i> (2006) ; Little <i>et al.</i> (2007a, b)* ; Nadeau <i>et al.</i> (2008) ; Rohlmann <i>et al.</i> (2009) ; Peng <i>et al.</i> (2011) ; Dreischarf <i>et al.</i> (2011)

TABEAU 1.6 – Lois de comportement et propriétés matériau utilisées dans les modèles Eléments Finis de disque intervertébral pour le *Nucleus pulposus*. Notes : <sup>a</sup> - formulation hyperélastique de type Mooney-Rivlin, <sup>b</sup> - formulation hyperélastique de type néo-Hooke, \* - modèle dont le DIV seul est représenté.

	Modèle	Propriétés matériau					Références
		E (MPa)	$\nu$	$C_{10}$ (MPa)	$C_{01}$ (MPa)	$D$ (MPa <sup>-1</sup> )	
Multiphasique	poroélastique	0,02012	0,45				Wu et Chen (1996)
		0,45	0,2				Silva <i>et al.</i> (2005)*
		1	0,17				Malandrino <i>et al.</i> (2009)*
		1	0,45				Salem <i>et al.</i> (nr)* <sup>a</sup> ; Williams <i>et al.</i> (2007)
		1,5	0,1				Argoubi et Shirazi-Adl (1996) ; Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
		1,5	0,17				Ferguson <i>et al.</i> (2004)*
		4-8	0,45				Martinez <i>et al.</i> (1997)*
	porohyperélastique			0,225 <sup>b</sup>		13,3 <sup>b</sup>	Malandrino <i>et al.</i> (2011)*
	poroélastique + gonflement osmotique	0,1	0,45				Laible <i>et al.</i> (1993)
		0,15					Schroeder <i>et al.</i> (2006, 2007)*; Schröder (2008)*; Schroeder <i>et al.</i> (2010)*
	porohyperélastique + gonflement osmotique	1,01	0,17				Massey (2009)*
				0,11 <sup>b</sup>		13,3 <sup>b</sup>	Galbusera <i>et al.</i> (2011a)*
	poroélastique + chimique + électrique	0,2	0,1				Magnier (2009)*; Magnier <i>et al.</i> (2009)*
		0,225	0,48				Iatridis <i>et al.</i> (2003)*
							Yao et Gu (2006)*; Ehlers <i>et al.</i> (2006a, b)*; Yao et Gu (2007)*; Ehlers <i>et al.</i> (2009)*; Karajan (2009, 2012)*

TABEAU 1.7 – Lois de comportement et propriétés matériau utilisées dans les modèles Eléments Finis de disque intervertébral pour le *Nucleus pulposus* (suite). Notes : <sup>a</sup> - formulation hyperélastique de type Mooney-Rivlin, <sup>b</sup> - formulation hyperélastique de type néo-Hooke, \* - modèle dont le DIV seul est représenté.

<sup>a</sup>. Année non renseignée.

**Remarque - Modélisation de la dégénérescence.** Lors de la dégénérescence, le comportement mécanique du DIV est grandement modifié (cf. section 1.1.4.1). De la même façon que pour la géométrie (cf. section 1.2.1), les propriétés matériau des modèles EF tenant compte de la dégénérescence discale doivent être adaptées. Les modifications généralement évoquées sont :

- augmentation de la rigidité de l’AF et/ou du NP (Natarajan *et al.*, 2004 ; Massey, 2009 ; Chagnon, 2009 ; Chagnon *et al.*, 2010 ; Kurutz et Oroszváry, 2010 ; Gonzalez Gutierrez, 2012),
- diminution de la rigidité des PC (Kurutz et Oroszváry, 2010),
- diminution de la rigidité des fibres de l’AF (Schmidt *et al.*, 2007b),
- augmentation de la compressibilité du NP par le biais d’une diminution du coefficient de Poisson  $\nu$  (Natarajan *et al.*, 2004 ; Kurutz et Oroszváry, 2010),
- diminution de la perméabilité et de la porosité dans les modèles poroélastiques (Argoubi et Shirazi-Adl, 1996 ; Natarajan *et al.*, 2004 ; Magnier, 2009 ; Magnier *et al.*, 2009 ; Chagnon, 2009 ; Chagnon *et al.*, 2010 ; Galbusera *et al.*, 2011b),
- diminution de la pression interstitielle dans les modèles poroélastiques (Galbusera *et al.*, 2011b) ou de la pression intradiscale dans le cas où le NP est modélisé par un fluide (Goto *et al.*, 2002 ; Little, 2004 ; Little *et al.*, 2007a, b),
- diminution de la teneur initiale en eau (Natarajan *et al.*, 2004 ; Galbusera *et al.*, 2011b ; Gonzalez Gutierrez, 2012),
- diminution de la teneur en charges fixes (Iatridis *et al.*, 2003).

### 1.2.3 Chargement

L’un des avantages de l’analyse par la méthode des Elements Finis est le contrôle du chargement que l’on souhaite imposer (type de chargement, amplitude, position), et l’infinie répétabilité des essais numériques. Une très grande variété de chargement est répertoriée dans la littérature. Celui-ci peut être statique ou dynamique, monotone ou cyclique, simple (compression seule, par exemple) ou combinaison de différents types de chargements (compression + torsion, par exemple).

Comme on ne connaît pas le chargement réel *in vivo* qui s’applique sur le DIV, hormis quelques données cinématiques et de pression intradiscale (Nachemson et Elfstrom (1970) ; Wilke *et al.* (1999, 2001)), la plupart des modèles EF s’attache à essayer de répliquer les conditions d’expériences réalisées *in vitro*. Généralement, dans un modèle de segment lombaire (ou de colonne lombaire complète), le PC inférieur de la vertèbre inférieure est fixé et le chargement est appliqué sur le PC supérieur de la vertèbre supérieure. Dans le cas où le DIV seul est représenté, le PC inférieur est fixé et le chargement est appliqué sur le PC supérieur.

Les tableaux 1.8 et 1.9 résument les conditions de chargement (type, amplitude) imposées dans les modèles EF de la littérature, dans les cas de chargement statique et en fluage respectivement. Le contrôle du chargement se fait majoritairement à force imposée et/ou moment imposé. Dans quelques cas, il se fait à déplacement et/ou angle imposé. Dans la plupart des cas de chargement statique, le chargement appliqué est un chargement de compression seule ou de précharge en compression combinée avec un autre type de chargement



(flexion/extension, inclinaison latérale, torsion). Sous condition de fluage, le chargement est presque toujours compressif. Les amplitudes de forces et moments imposés se situent *a priori* dans la fourchette des valeurs physiologiquement admissibles.

Type	Compression (N)	Flexion/Extension (Nm)	Inclinaison latérale (Nm)	Torsion (Nm)	Références
statique	90 (précharge)	5			Peng <i>et al.</i> (2006)
	100 (précharge)	10	10	2	Moramarco <i>et al.</i> (2010)*
	150 (précharge)	10	10	10	Chen <i>et al.</i> (2008)
	260 (précharge) + 200				Zander <i>et al.</i> (2006)
	294	15			Goto <i>et al.</i> (2002)
	400	3,5	3,5	3,5	Zander <i>et al.</i> (2001)
	400	10		10	Salem <i>et al.</i> (nr)* <sup>a</sup>
	400	22	22	5, 10, 15, 20	Karajan (2009, 2012)*
	500 (précharge)	2,5 ; 5 ; 7,5 ; 10	2,5 ; 5 ; 7,5 ; 10	2,5 ; 5 ; 7,5 ; 10	Schmidt <i>et al.</i> (2006)
	500 (précharge)	5	5		Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
	500	5,3	5,3	5,3	Heuer <i>et al.</i> (2008)
	500 (précharge)	7°/2°	3°	2°	Little (2004) ; Little <i>et al.</i> (2007a, b)*
	500 (précharge)	7,5			Rohlmann <i>et al.</i> (2009)
	500 (précharge)	7,5	7,5	7,5	Schmidt <i>et al.</i> (2009)
	1000	5	5	5	Gonzalez Gutierrez (2012)
	1000	7,5		7,5	Malandrino <i>et al.</i> (2009)*
	1500				Meakin et Hukins (2001)*
	1624	14		2	Prud'homme (2008)
	2000				Peng <i>et al.</i> (2006) ; Zhang <i>et al.</i> (2009b) ; Kurutz et Oroszváry (2010)
	2000 + 500 (cisaillement)	10	20	10	Lodygowski <i>et al.</i> (2005)
	2500				Eberlein <i>et al.</i> (2001)
	2,8 mm				Baroud <i>et al.</i> (2003)
		2,5 ; 5 ; 7,5 ; 10			Schmidt <i>et al.</i> (2007a)
		7,5	7,5		Schmidt <i>et al.</i> (2007b)
		7,5	7,5	7,5	Ayturk (2010)
		10	10	10	Robin <i>et al.</i> (1994) ; Rohlmann <i>et al.</i> (2006)

TABLEAU 1.8 – Conditions de chargement (type, amplitude) imposées dans les modèles Eléments Finis.

a. Année non renseignée.

Type	Compression (N)	Flexion/Extension (Nm)	Inclinaison latérale (Nm)	Torsion (Nm)	Références
fluage	400, 1200, 2000 (2H)				Argoubi et Shirazi-Adl (1996)
	400 (4H)				Silva <i>et al.</i> (2005)*
	500 (précharge)	7,5			Galbusera <i>et al.</i> (2011b)
	500				Malandrino <i>et al.</i> (2011)*
	600 (précharge), 2000	10°			Wang <i>et al.</i> (2000)
	850 (16H) - 400 (8H)				Williams <i>et al.</i> (2007)
	1000				Schroeder <i>et al.</i> (2006, 2007) ; Schröder (2008) ; Schroeder <i>et al.</i> (2010)*
	200, 500 (8H) - 500, 1000 (16H)				Galbusera <i>et al.</i> (2011a)
	0,2 MPa				Laible <i>et al.</i> (1993)
	0,35 MPa				Chagnon (2009) ; Chagnon <i>et al.</i> (2010)
	0,5 MPa(16H) - 0 MPa(8H)				Ferguson <i>et al.</i> (2004)*
	0,5 MPa				Massey (2009)*
	1,92 MPa				Martinez <i>et al.</i> (1997)* Ehlers <i>et al.</i> (2006a, b, 2009)*

TABLEAU 1.9 – Conditions de chargement (type, amplitude) imposées dans les modèles Eléments Finis (suite).

### 1.2.4 Bilan

La littérature sur la modélisation du disque intervertébral est vaste et rapporte de nombreux modèles aux caractéristiques variées en termes de choix de géométrie, loi de comportement, valeurs des paramètres matériau, cas de chargement. Cette diversité qui existe dans les modèles est encore accentuée lors de l'étude de la dégénérescence où la géométrie et les paramètres matériau sont modifiés.

Les modèles les plus élémentaires proposent une géométrie simplifiée (avec parfois l'utilisation de modèles bidimensionnels) et un choix de loi de comportement composée d'une seule phase solide (élastique linéaire) pour chacun des composants du DIV ou éventuellement une phase fluide pour le NP, relativement facile à mettre en œuvre. Suite à l'application d'un chargement, la réponse instantanée du modèle est calculée. Divers paramètres de sortie sont extraits des résultats de la simulation : l'amplitude de mouvement (courbes force/déplacement et moment/angle), la distribution des contraintes dans les différents composants du DIV, le renflement de l'AF, etc.

Les modèles les plus sophistiqués reposent sur la reconstruction d'une géométrie spécifique (avec, en amont, un travail de traitement d'images conséquent ([Gonzalez Gutierrez, 2012](#))) et la formulation de lois de comportement multiphasiques délicates. Ces dernières nécessitent l'écriture d'équations assez complexes décrivant le couplage entre la phase solide (matrice extra-cellulaire) et le fluide interstitiel, au minimum. L'incorporation du gonflement osmotique, et des phénomènes électrique (charges fixes portées par les protéoglycanes) et chimique (concentration en nutriments) ajoute encore de la complexité. Le lecteur intéressé pourra se reporter notamment aux travaux de thèse de [Magnier \(2009\)](#) pour une revue de la littérature concernant les différentes extensions qui ont été apportées à l'approche poroélastique pour la modélisation du DIV. Ces modèles multiphasiques permettent de prendre en compte le comportement transitoire du DIV, et mettent notamment en évidence l'importance des phénomènes de gonflement et de diffusion du fluide à l'intérieur du réseau solide. Suite à un chargement en fluage, la variation de la hauteur discale, de la teneur en eau, les profils de concentration en nutriments, etc. pendant un cycle diurne sont calculés.

Forts de ces connaissances sur le DIV, sa structure, son comportement mécanique et des stratégies proposées pour le modéliser, nous nous attachons, dans la section suivante, à définir les objectifs de la présente étude.

## 1.3 Objectifs et Méthodes

### 1.3.1 Objectif : une meilleure compréhension du comportement mécanique

L'objectif global de cette étude est la **contribution à une meilleure compréhension du comportement mécanique du disque intervertébral**. Plus spécifiquement, **un intérêt particulier est porté à l'étude du comportement mécanique du *Nucleus pulposus***. En effet, les aspects mécaniques concernant les plateaux cartilagineux ne suscitent pas tellement d'enjeu même si leur rôle dans les phénomènes d'échange de liquide et de nutriments, et donc probablement dans le phénomène de dégénérescence,

semble indéniable, leur impact mécanique serait assez réduit. Concernant l'*Annulus fibrosus*, son comportement et son rôle mécanique sont assez bien compris et assez bien retranscrits dans les modèles (notamment en ce qui concerne les lois de comportement, et leur application numérique par la Méthode Eléments Finis). Afin d'acquérir une meilleure compréhension des états de contraintes et de déformation au sein du DIV sous diverses conditions de chargement et simuler des conditions pathologiques de dégénérescence, la modélisation, aussi bien théorique (analytique) que numérique (par la Méthode des Eléments Finis notamment), peut constituer un outil efficace pour l'étude des phénomènes multi-physiques et des mécanismes complexes d'échange prenant place au sein du DIV.

La première difficulté dans la modélisation consiste à identifier les phénomènes physiques pertinents à étudier à une échelle de temps donnée. L'étude bibliographique de la description anatomique et physiologique du DIV et des stratégies de modélisation employées nous permet de distinguer **plusieurs échelles de temps** pour observer la réponse du DIV, comme le montre la Figure 1.16. A l'échelle des temps courts, le NP possède un comportement quasi-incompressible ; il est alors modélisé par une solide élastique ou un fluide. L'étude à l'échelle des temps longs (plusieurs heures à plusieurs jours) révèle l'**importance de la diffusion** des molécules d'eau (attirées par la présence des protéoglycanes) à l'intérieur de la matrice extracellulaire, **induisant ainsi un gonflement remarquable** du NP. Notons que les aspects électrique et chimique interviennent également à cette échelle, mais leur étude dépasse le cadre de ce travail. Enfin, à l'échelle des temps très longs (plusieurs années), le phénomène de dégénérescence discale marque l'évolution du comportement mécanique du DIV, touché au niveau du NP en premier lieu. Notons, de surcroît, que, les déplacements observés (tels que renflement de l'AF, par exemple) étant de l'ordre de quelques millimètres, l'étude du DIV se situe dans le **cadre général des grandes déformations**.

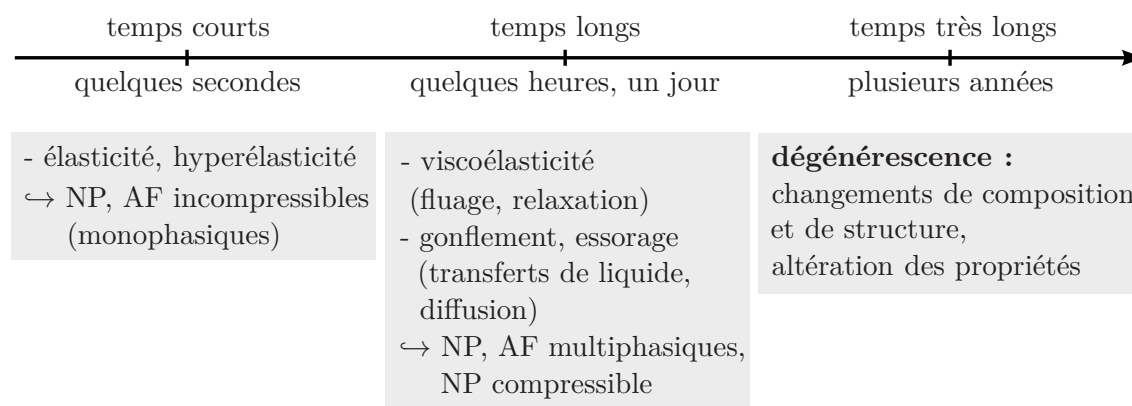


FIGURE 1.16 – Schéma représentant les échelles de temps pour observer la réponse du DIV et les stratégies de modélisation adaptées.

L'un des plus grands enjeux, avant de prédire la dégénérescence, est donc de décrire correctement les phénomènes physiques qui ont lieu aux temps longs. La bonne compréhension de ces phénomènes passe par une **bonne modélisation des phénomènes couplés mécanique/transferts de liquide (diffusion)**. Dès lors, le recours à l'approche multi-phasique semble incontournable. Dans la littérature, il existe deux types approches :

- les modèles poroélastiques, dont la formulation tire son origine des théories proposées initialement pour la mécanique des sols (Biot, 1941), reposant sur la théorie des mélanges (Truesdell et Toupin, 1960 ; Bowen, 1976), et où intervient la notion de perméabilité du milieu (lois de filtration de type « Darcy »). Dans cette théorie, la cinématique de chacun des composants du mélange est considérée et la contrainte est la somme des contraintes dans chacun des composants. Cependant, plusieurs difficultés sont soulevées : l’application du Second Principe de la Thermodynamique est discutable (Rajagopal, 2003) et la détermination de conditions aux limites pertinentes n’est pas évidente (Rajagopal et Tao, 1995). Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de thèse de Karajan (2009), par exemple, pour une application rigoureuse de ce type d’approche au cas de la modélisation du disque intervertébral<sup>6</sup>.
- les modèles dits « de gonflement », où intervient la notion de potentiel chimique et d’osmose. Ces modèles tirent leur origine de la théorie de Flory (1953), reprise plus tard par Treloar (1975), initialement conçue pour les élastomères gonflés. Cette théorie a ensuite été réintroduite par Rajagopal *et al.* (1986) et Durning et Morman (1993) pour l’étude des gels, puis améliorée plus récemment par Baek et Srinivasa (2004), Hong *et al.* (2008), Chester et Anand (2010), Duda *et al.* (2010), Lucantonio *et al.* (2013) et Drozdov et Christiansen (2013a, b, c) notamment.

Ces deux types de modèles sont capables de prédire le fluage d’un corps sous chargement, car ils peuvent prédire l’écoulement du liquide par rapport à la phase solide. La similitude entre les deux approches réside dans l’analogie forte entre une diffusion liquide de type « Darcy » dans le premier cas, et une diffusion osmotique dans le second, dont la forme mathématique est assez similaire. En revanche, seul le deuxième type de modèle permet de traduire le gonflement « naturel » hydrophile en l’absence de chargement. Pour cette raison, depuis quelques années, les modèles « de gonflement » connaissent un fort engouement pour la modélisation des matériaux de type « gel » (solide capable de gonfler au contact d’un fluide). Compte tenu des observations faites sur le comportement aux temps longs du NP, ce type de modèle « de gonflement » couplant mécanique (en grandes déformations) et diffusion semble être plus représentatif de la physique prenant place au sein du NP.

### 1.3.2 Idées et méthodes : utilisation d’un modèle de type « gel »

Comme cela a déjà été évoqué dans la section 1.1.2.3, le NP est un matériau gélifique constitué d’une matrice extra-cellulaire composée de longues chaînes de macromolécules et d’une très grande quantité de fluide interstitiel (environ 80 %), majoritairement composé d’eau. En termes de comportement mécanique, le NP présente à la fois les caractéristiques d’un solide et d’un fluide (cf. section 1.1.3.1), selon l’échelle de temps à laquelle il est étudié. Finalement, de par sa composition et son comportement mécanique (notamment sa capacité à gonfler naturellement), le NP possède une très grande similitude avec les hydrogels, composés d’un réseau de chaînes de polymères réticulées et d’une grande quantité d’eau (cf. section 1.1.4.2). L’ensemble de ces remarques suggère qu’un **parallèle peut être fait entre le NP d’une part, et les gels d’autre part**, ces deux matériaux possédant une partie solide et une partie fluide.

6. Les travaux de thèse de Magnier (2009) reposent également sur ce type d’approche, mais le formalisme mécanique multiphasique développé y est appliqué dans une version linéarisée simplifiée.

**L'idée est de s'inspirer des modèles existants pour les gels, qui incluent diffusion (gonflement) et grandes déformations dans un modèle monophasique, afin de construire un modèle pour les matériaux de type « gel » en général et de l'adapter au cas particulier du NP.**

Ce travail s'articule autour de deux points :

- 1. la description des aspects théoriques** (hypothèses, cadre cinématique, théorie constitutive...) du modèle qui permettent d'aboutir à la formulation des lois de comportement régissant la mécanique d'un matériau de type « gel » en général (comme les hydrogels ou le NP). Ce développement s'appuie sur deux axes majeurs, permettant de dégager des différences par rapport aux modèles existants pour les gels :

**axe 1 : l'introduction d'une dépendance de la raideur du matériau vis-à-vis du gonflement.** En effet, le gonflement d'un tel matériau étant assez important, il semble nécessaire d'incorporer cette hypothèse dans la formulation du modèle.

**axe 2 : la prise en compte d'un état de référence gonflé.** A notre connaissance, la littérature propose systématiquement de considérer l'état sec comme état de référence. Pour autant, nous verrons que cet état n'a pas réellement de sens concernant les matériaux de type « gel » : effectivement, les hydrogels sont généralement préparés en solution aqueuse (ils contiennent donc initialement déjà de l'eau), et le NP à l'état sain contient au moins 70 % d'eau.

La dérivation du modèle sous ses deux formes s'accompagnera de la **mise en œuvre numérique**, aussi bien analytique (MATLAB) qu'à travers l'implémentation des lois de comportement dans un code de calcul Eléments Finis (ABAQUS).

- 2. l'application au NP** à travers le développement d'un modèle EF pour le DIV : proposition d'une géométrie, choix du modèle pour le comportement de l'AF, calculs numériques.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue bibliographique sur le disque intervertébral et sa modélisation.

Une description anatomique et physiologique du DIV a d'abord été proposée afin de mettre en exergue sa complexité. L'intérêt de ce travail étant l'analyse du comportement mécanique du DIV, nous nous sommes efforcés de préciser les relations entre structure, composition et propriétés mécaniques. Le DIV est le siège de nombreux phénomènes physiques (hydratation/déshydratation, endommagement...) prenant place à différentes échelles de temps. La compréhension de son comportement mécanique est ardue, et d'autant plus délicate que le DIV (et notamment le *Nucleus pulposus*) évolue au cours du temps en raison de la dégénérescence discale.

Dans un second temps, les modèles numériques pour le DIV ont été décrits, tant en termes de choix de géométrie, de loi de comportement affectée à chacun des composants que de chargement. Les stratégies de modélisation sont nombreuses et sont guidées par

le type de phénomènes que l'on souhaite étudier. Ces dernières années ont été marquées par une surenchère concernant l'incorporation de plus en plus de phénomènes au sein de modèles multiphasiques, complexifiant la formulation des modèles.

L'objectif de cette étude a finalement été exposé. Compte tenu des similitudes entre le NP et les hydrogels, en termes de composition et de comportement mécanique, l'idée de ce travail est de s'inspirer des modèles existants pour les gels afin de formuler un modèle adapté au NP. Le but de ce modèle couplant diffusion/gonflement et grandes déformations dans un modèle monophasique pour les matériaux de type « gel » sera d'être adapté spécifiquement au NP.

Le chapitre suivant propose, après un bref point bibliographique sur les gels, de décrire les aspects théoriques et numériques de ce nouveau modèle, en incluant quelques exemples d'application.





## Chapitre 2

# Développement d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion

La revue bibliographique présentée dans la section 1.2 montre que le couplage entre le comportement mécanique et le phénomène de gonflement peut se faire de deux manières : soit par une approche poroélastique, où l'écoulement du liquide à travers le solide déformable est pris en compte par un terme de filtration de type loi de Darcy, soit par une approche de type diffusion, où les mouvements de liquide sont induits par les variations d'un potentiel chimique.

La première approche est relativement simple à mettre en œuvre. Bien connue des mécaniciens des sols, elle ne nécessite que la détermination de la perméabilité du milieu, cette dernière pouvant être reliée directement à la taille caractéristique des pores du milieu considéré. Son principal désavantage, à notre sens, réside dans la nature même de la loi de Darcy usuelle :

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\eta} \nabla p, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de filtration,  $p$  la pression,  $K$  la perméabilité et  $\eta$  la viscosité. Cette dernière ne prévoit de mouvements de liquide qu'en présence d'un gradient de pression. Elle est donc inapte à décrire les effets d'un gradient de concentration, pouvant être lui aussi à l'origine de mouvements de la phase liquide. C'est justement cet effet diffusif qui est à l'origine du gonflement naturel du NP et de tous les gels mis en présence d'un solvant approprié. Il apparaîtra clairement, dans les développements théoriques de ce chapitre, que l'approche « diffusive » retenue dans ce travail préserve les avantages de l'approche poroélastique tout en y ajoutant le gonflement d'origine chimique.

Ce chapitre s'intéresse donc aux modèles couplant grandes déformations et diffusion pour les matériaux de type « gel » en général. Dans un premier temps, un bref rappel bibliographique sur les gels est présenté. La deuxième partie rappelle les équations d'équilibre d'un problème couplé mécanique/diffusion d'espèces moléculaires. Les troisième et quatrième parties de ce chapitre présentent le développement d'un nouveau modèle couplant grandes déformations et diffusion. Deux aspects originaux par rapport aux modèles déjà existants sont proposés : la prise en compte de l'évolution de la raideur du matériau

en fonction du gonflement et la prise en compte d'une configuration de référence préalablement gonflée. Dans les deux cas, les développements théoriques puis la mise en œuvre numérique sont détaillés ; quelques exemples d'application illustrent les deux approches.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Gonflement des gels : rappel bibliographique</b>	<b>43</b>
2.1.1	Mélange solvant-polymère	44
2.1.2	Elasticité d'un réseau réticulé non gonflé et d'un réseau gonflé	47
2.1.3	Couplage entre grandes déformations et gonflement	51
2.1.4	Modèles récents : généralisation au cadre tridimensionnel	53
2.1.5	Bilan	54
<b>2.2</b>	<b>Rappel : équations d'équilibre</b>	<b>55</b>
<b>2.3</b>	<b>Déviation par rapport à la théorie classique</b>	<b>58</b>
2.3.1	Motivation	58
2.3.2	Dérivation du modèle	59
2.3.3	Mise en œuvre numérique	71
2.3.4	Quelques applications	76
2.3.5	Bilan	94
<b>2.4</b>	<b>Prise en compte d'une configuration de référence gonflée</b>	<b>95</b>
2.4.1	Motivation	95
2.4.2	Dérivation du modèle	96
2.4.3	Quelques applications	102
2.4.4	Bilan	107
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>108</b>

---

## 2.1 Gonflement des gels : rappel bibliographique

Deux ingrédients essentiels sont nécessaires pour former un **gel** : un **réseau polymérique** et un **solvant** (cf Figure 2.1). Le réseau est composée d'un ensemble de longues chaînes de polymère connectées entre elles au niveau des points de réticulation, formant ainsi une structure tridimensionnelle. Ce réseau constitue le squelette du gel. Un réseau polymérique est susceptible de former un gel à condition de présenter une certaine affinité avec un solvant. Dans ce cas, les molécules de solvant pénètrent à l'intérieur du réseau de polymère. Un tel réseau polymérique imbibé de solvant est appelé « gel ». Il est à noter ici que la définition du mot « solvant » est à prendre au sens très large de fluide qui pénètre à l'intérieur du réseau de polymère (il n'est pas question de dissolution des chaînes polymériques, comme on l'entend généralement au sens chimique du terme).

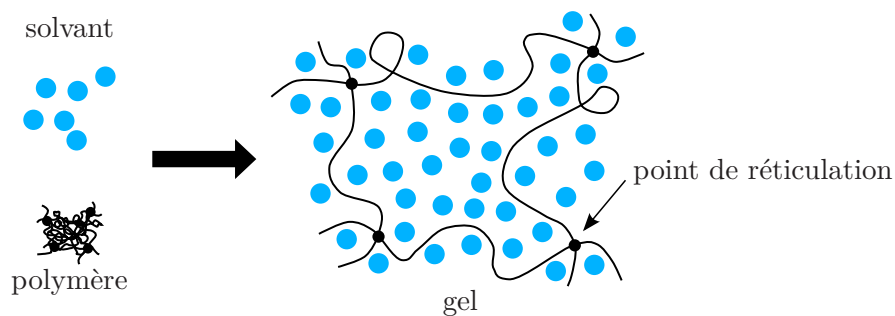


FIGURE 2.1 – Schéma de formation et de gonflement d'un gel : mélange solvant-polymère.

La principale caractéristique des gels est leur propension à gonfler remarquablement comme l'illustre la Figure 2.2 où un gel est représenté à l'état sec et à l'état gonflé. **Le mécanisme à l'origine de ce phénomène de gonflement est la diffusion des molécules de solvant à l'intérieur du réseau formé par les chaînes de polymère.** En effet, ces dernières, initialement repliées sous forme de pelote compacte, s'entourent des molécules de solvant et s'étirent tout en s'éloignant les unes des autres (Vervoort, 2006). Le réseau polymérique occupe alors clairement un volume plus important que précédemment (cf Figure 2.1).

Macroscopiquement, un gel est un matériau plutôt souple (faible module d'Young), capable de conserver sa forme sous son propre poids mais aussi de se déformer considérablement et de façon non-linéaire sous de relativement faibles contraintes (Vervoort, 2006). D'un point de vue thermodynamique, un gel est considéré comme un mélange (d'un solvant et d'un réseau de polymère réticulé) susceptible de gonfler.

La présente section vise, dans un premier temps, à rappeler les bases de la thermodynamique associée au gonflement des gels. Pour cela, il est nécessaire d'introduire plusieurs notions :

- la notion de mélange solvant-polymère ou solution de polymère (section 2.1.1) ;
- la notion d'élasticité d'un réseau réticulé et son adaptation au cas gonflé (section 2.1.2) ;
- puis le couplage entre ces deux phénomènes dans le cas d'un gel ou, plus généralement, d'un réseau gonflé (section 2.1.3).

Dans un second temps, les progrès récents concernant la théorie sur le gonflement des gels

sont abordés (section 2.1.4).

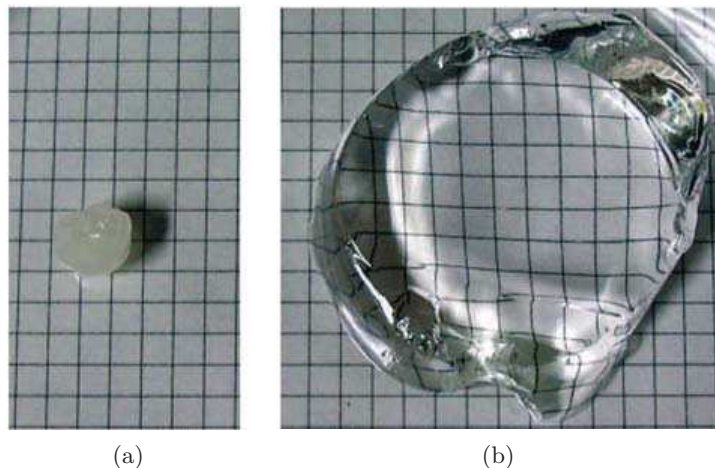


FIGURE 2.2 – Illustration du gonflement d'un gel. (a) Gel sec. (b) Gel gonflé. Photographies issues de [Ono et al. \(2008\)](#).

### 2.1.1 Mélange solvant-polymère

[Flory \(1953\)](#) est considéré comme le premier scientifique à avoir étudié le phénomène de gonflement, dans le contexte général de la physique des polymères, dans la seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Sa théorie a ensuite été reprise par [Treloar \(1975\)](#), figure de proue de la mécanique du caoutchouc, pour l'étude du gonflement des élastomères.

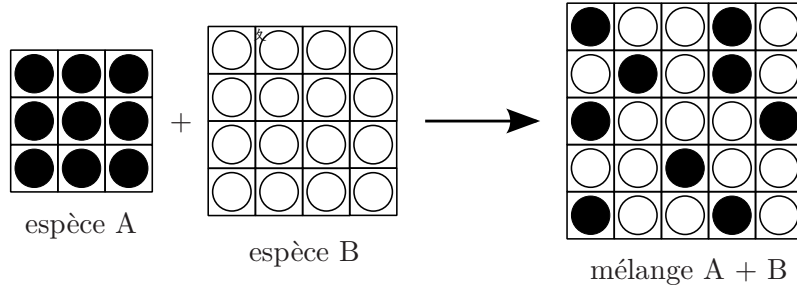
Le postulat de départ de la théorie de Flory pour le gonflement des élastomères est le suivant : **thermodynamiquement, le gonflement d'un élastomère peut être vu comme le mélange binaire d'un réseau de chaînes de polymère et d'un solvant**, autrement dit un polymère en solution. Le développement complet de la théorie de Flory, concernant la thermodynamique des mélanges binaires (qui comprend l'étude des solutions de polymères, des solutions de petites molécules et des mélanges de polymères) est disponible dans l'ouvrage de [Rubinstein et Colby \(2003\)](#) dans lequel les concepts des années 1950 sont retranscrits dans un langage plus moderne. Dans cette étude, nous nous limiterons à rappeler les résultats essentiels sur les mélanges solvant-polymère, ou solutions de polymères, dont nous aurons besoin par la suite.

Considérons un mélange binaire de deux espèces  $A$  et  $B$ , de volume  $V_A$  et  $V_B$  respectivement. Afin d'illustrer cette démonstration, il convient d'imaginer que ce mélange est inscrit dans un réseau bidimensionnel composé de  $n$  sites possédant chacun un volume  $\nu_0$ , comme l'illustre la Figure 2.3. Si l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de perte de volume lors du mélange, alors le volume total du mélange est simplement

$$V = n\nu_0 = V_A + V_B. \quad (2.2)$$

Les fractions volumiques des espèces  $A$  et  $B$  sont définies par :

$$\phi_A = \frac{V_A}{V} \quad \text{et} \quad \phi_B = \frac{V_B}{V}. \quad (2.3)$$


 FIGURE 2.3 – Mélange binaire de deux espèces  $A$  et  $B$  sans changement de volume.

La variation d'énergie libre (ou énergie de Helmholtz) du mélange des deux espèces, notée  $\Delta F_{\text{mix}}$ , où l'indice  $\cdot_{\text{mix}}$  (pour « mixing » en anglais) désigne le mélange, résulte de la somme de deux contributions (Cloitre, nr)<sup>1</sup> :

- une contribution d'origine entropique  $\Delta S_{\text{mix}}$ , qui traduit la tendance des molécules à adopter le plus de configurations possibles,
- une contribution énergétique  $\Delta U_{\text{mix}}$  associée à la variation d'énergie qui se produit lorsque deux molécules différentes sont mises en contact.

Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\Delta F_{\text{mix}} = \Delta U_{\text{mix}} - T \Delta S_{\text{mix}}, \quad (2.4)$$

où  $T$  est la température absolue (en K).

**Remarque - Energie libre et enthalpie libre.** Dans sa théorie originale, Flory utilise la fonction de Gibbs ou enthalpie libre  $\Delta G_{\text{mix}}$  pour décrire la thermodynamique du mélange :

$$\Delta G_{\text{mix}} = \Delta H_{\text{mix}} - T \Delta S_{\text{mix}},$$

où  $\Delta H_{\text{mix}}$  désigne la variation d'enthalpie du mélange. L'enthalpie étant définie par  $H = U + pV$  (avec  $U$  l'énergie interne,  $p$  la pression et  $V$  le volume), lorsque  $p$  désigne la pression atmosphérique, le terme  $pV$  peut être négligé. Dans ce cas, les grandeurs  $H$  et  $U$  sont confondues, et on peut également confondre  $\Delta H_{\text{mix}}$  et  $\Delta U_{\text{mix}}$ , ainsi que  $\Delta G_{\text{mix}}$  et  $\Delta F_{\text{mix}}$ , dans l'équation ci-dessus et dans l'équation (2.4).

A la lumière de la formule de Boltzmann, la variation d'entropie du mélange  $\Delta S_{\text{mix}}$  se calcule à partir du nombre de façons  $\Omega$  de répartir  $n_A$  molécules de l'espèce  $A$  et  $n_B$  molécules de l'espèce  $B$  dans le mélange  $A+B$  :

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \ln \Omega = -k (n_A \ln \phi_A + n_B \ln \phi_B), \quad (2.5)$$

où  $k$  désigne la constante de Boltzmann ( $k = 1,3806488 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ). La Figure 2.4 résume les différents cas possibles : un mélange régulier de deux solutions, un mélange solvant-polymère, un mélange de deux polymères.

Notant  $v_A$  (respectivement  $v_B$ ) le volume moléculaire de l'espèce  $A$  (respectivement  $B$ ), on dispose des relations suivantes :  $V_A = n_A v_A$  (respectivement  $V_B = n_B v_B$ ) et  $v_A = N_A v_0$

1. Année non renseignée.

(respectivement  $v_B = N_B \nu_0$ ), où  $N_A$  (respectivement  $N_B$ ) est le nombre de sites occupés par une molécule de A (respectivement B). A l'aide des relations (2.2) et (2.3), la variation d'entropie du mélange s'écrit finalement :

$$\Delta S_{\text{mix}} = -kn \left( \frac{\phi_A}{N_A} \ln \phi_A + \frac{\phi_B}{N_B} \ln \phi_B \right). \quad (2.6)$$

Cette expression montre que la variation d'entropie du mélange est toujours positive, ce qui signifie que l'entropie a tendance à favoriser le mélange.

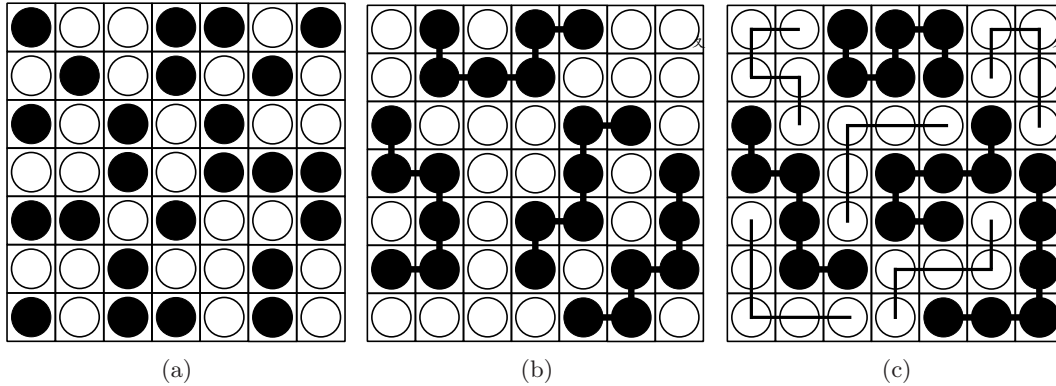


FIGURE 2.4 – Mélange binaire formé (a) de deux solutions, (b) d'un polymère et d'un solvant, (c) de deux polymères.

La variation d'énergie interne est calculée à partir des trois énergies d'interaction  $u_{AA}$ ,  $u_{BB}$  et  $u_{AB}$  entre les paires de molécules  $A$ - $A$ ,  $B$ - $B$  et  $A$ - $B$  respectivement :

$$\Delta U_{\text{mix}} = \frac{zn}{2} \phi_A \phi_B (2u_{AB} - u_{AA} - u_{BB}), \quad (2.7)$$

où  $z$  désigne la coordinence du réseau, c'est-à-dire le nombre de plus proches voisins. En introduisant le paramètre d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$  défini par

$$\chi = \frac{z}{2kT} (2u_{AB} - u_{AA} - u_{BB}), \quad (2.8)$$

la variation d'énergie interne s'écrit simplement :

$$\Delta U_{\text{mix}} = nkT \chi \phi_A \phi_B. \quad (2.9)$$

On remarque alors que c'est le signe de  $\chi$  qui détermine le signe de  $\Delta U_{\text{mix}}$ . Si les interactions entre l'espèce  $A$  et l'espèce  $B$  favorisent les contacts entre les paires de molécules  $A$ - $B$ , alors  $\chi < 0$  et  $\Delta U_{\text{mix}} < 0$  : l'énergie interne contribue favorablement au mélange. Dans le cas où les contacts  $A$ - $A$  et  $B$ - $B$  sont favorisés (c'est-à-dire en réalité dans la plupart des cas), alors  $\chi > 0$  et  $\Delta U_{\text{mix}} > 0$  : l'énergie interne tend à s'opposer au mélange.

Substituant les expressions (2.6) et (2.9) dans l'équation (2.4), on obtient la forme générale de la variation d'énergie libre d'un mélange binaire quelconque sous la forme :

$$\Delta F_{\text{mix}} = nkT \left[ \chi \phi_A \phi_B + \left( \frac{\phi_A}{N_A} \ln \phi_A + \frac{\phi_B}{N_B} \ln \phi_B \right) \right]. \quad (2.10)$$

Le signe de  $\Delta F_{\text{mix}}$  est déterminé par la somme des termes entropique  $-T\Delta S_{\text{mix}}$  (toujours négatif) et énergétique  $\Delta U_{\text{mix}}$  (positif ou négatif). Tout comme n'importe quel processus spontané que l'on peut trouver dans la nature, un réseau et un solvant ne se mélangeront librement que si ce processus est associé à une diminution de l'énergie libre. Autrement dit,  $\Delta F_{\text{mix}} < 0$  favorise le mélange, i.e. le gonflement du réseau. Lorsque  $\Delta F_{\text{mix}}$  est minimal, le système est à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire que les molécules de solvant et de polymère ne diffusent plus les unes à l'intérieur des autres.

Dans le cas particulier d'un mélange solvant-polymère, où l'espèce  $A$  désigne le polymère et l'espèce  $B$  le solvant, on a  $N_A \gg 1$  (puisque un polymère est une macromolécule occupant plusieurs sites consécutifs) et  $N_B = 1$  (car chaque molécule de solvant occupe un seul site). Notant en outre  $\phi_A = \phi$ , on a  $\phi_B = 1 - \phi$ , l'expression (2.10) devient :

$$\Delta F_{\text{mix}} = nkT [(1 - \phi) \ln (1 - \phi) + \chi \phi (1 - \phi)]. \quad (2.11)$$

En général, le volume  $\nu_0$  d'un site du réseau est défini comme étant égal au volume de l'unité la plus petite, c'est-à-dire une molécule de solvant que l'on notera simplement  $\nu$  par la suite. On a alors, en utilisant les équations (2.2) et (2.3)<sub>1</sub> :

$$n = V/\nu = V_A/(\nu\phi) = V_p/(\nu\phi) \quad (2.12)$$

où  $V_A = V_p$  désigne le volume de polymère.

Finalement, la **variation d'énergie libre totale d'un mélange solvant-polymère** est donnée par :

$$\Delta F_{\text{mix}} = \frac{kT}{\nu} \frac{V_p}{\phi} [(1 - \phi) \ln (1 - \phi) + \chi \phi (1 - \phi)], \quad (2.13)$$

où  $\phi$  est la fraction volumique de polymère.

### 2.1.2 Elasticité d'un réseau réticulé non gonflé et d'un réseau réticulé gonflé

Les gels présentent, en outre, la caractéristique structurelle commune à tous les matériaux élastomères : les longues chaînes de polymère qui le constituent forment un réseau réticulé. Ceci leur confère deux propriétés remarquables :

- une capacité à supporter de grandes déformations sans rupture, ;
- une capacité à retrouver spontanément leur état initial (après déformation).

Ces propriétés forment ce qu'on appelle classiquement l'élasticité caoutchoutique (« rubber elasticity » en anglais). La présence de longues chaînes de polymère permet d'expliquer le bon comportement en grandes déformations. En effet, dans l'état non déformé, les chaînes sont disposées aléatoirement sous forme de pelote compacte et peuvent se réorganiser selon d'autres configurations. En particulier, elles peuvent se réorganiser selon une configuration plus étirée lorsqu'elles sont soumises à une contrainte extérieure. D'autre part, la tendance des chaînes à revenir à leur configuration initiale s'explique par le développement d'une force de rappel lorsque le matériau est déformé. Cette propriété est rendue possible grâce au caractère permanent de la structure du matériau, de par la présence de points de réticulation, liaisons fortes entre les macromolécules.

L'analyse thermodynamique de la déformation élastique d'un réseau réticulé, proposée par Flory (1953), repose sur une analyse statistique de la formation des points de réticulation et des configurations possibles prises par les chaînes de polymère (le détail du



raisonnement ne sera pas rappelé ici). Si l'on note  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  et  $\lambda_z$  l'élongation du réseau dans les trois directions de l'espace, supposées principales, la variation d'entropie associée à la déformation d'un réseau réticulé est donnée par :

$$\Delta S_{\text{méca}} = -\frac{\nu_e k}{2} \left[ \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 - \ln(\lambda_x \lambda_y \lambda_z) \right], \quad (2.14)$$

où  $\nu_e$  désigne le nombre effectif de chaînes. La **variation d'énergie de déformation totale d'un réseau réticulé**, notée  $\Delta F_{\text{méca}}$ , provenant essentiellement de la variation d'entropie (la contribution énergétique est négligeable), est donc :

$$\Delta F_{\text{méca}} = -T \Delta S_{\text{méca}} = \frac{\nu_e k T}{2} \left[ \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 - \ln(\lambda_x \lambda_y \lambda_z) \right]. \quad (2.15)$$

En particulier, pour une cinématique isotrope, on a  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ , et donc

$$\Delta F_{\text{méca}} = \frac{\nu_e k T}{2} \left( 3\lambda^2 - 3 - \ln \lambda^3 \right). \quad (2.16)$$

On peut alors distinguer deux cas :

- cas d'un réseau réticulé non gonflé,
- cas d'un réseau réticulé gonflé.

Afin de mettre en évidence les caractéristiques spécifiques à chacun des cas, considérons un réseau réticulé dont les dimensions initiales sont  $L_{x_0}$ ,  $L_{y_0}$  et  $L_{z_0}$  dans la base  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , soumis à une déformation quelconque mais supposée sans cisaillement dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Notons  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  et  $\lambda_z$  l'élongation du réseau dans les trois directions de l'espace. Les dimensions du réseau déformé sont  $L_x = \lambda_x L_{x_0}$ ,  $L_y = \lambda_y L_{y_0}$ ,  $L_z = \lambda_z L_{z_0}$ . Notant  $V_0$  le volume du réseau dans son état de référence (une discussion concernant la définition de l'état de référence du réseau est proposée ci-après en remarque) et  $V$  le volume du réseau déformé, la variation de volume lors de la déformation  $V/V_0$  s'écrit :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{L_x L_y L_z}{L_{x_0} L_{y_0} L_{z_0}} = \lambda_x \lambda_y \lambda_z. \quad (2.17)$$

### a. Cas d'un réseau réticulé non gonflé.

Dans le cas de déformations classiques des élastomères, on peut raisonnablement supposer que le volume reste constant, i.e.  $V/V_0 = \lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$  (Flory, 1953 ; Ogden, 1984). La variation d'énergie de déformation, donnée par l'équation (2.15), est donc simplifiée de la façon suivante :

$$\Delta F_{\text{méca}} = \frac{\nu_e k T}{2} \left( \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 \right). \quad (2.18)$$

Si le réseau est soumis à une contrainte uniaxiale (le long de l'axe  $\mathbf{x}$ , par exemple), alors on a  $\lambda_x = \lambda$  et  $\lambda_y = \lambda_z = 1/\sqrt{\lambda}$ . La variation d'énergie libre lors d'une sollicitation uniaxiale devient donc :

$$\Delta F_{\text{méca}} = \frac{\nu_e k T}{2} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right). \quad (2.19)$$

La force longitudinale (selon  $\mathbf{x}$ ) nécessaire pour déformer le réseau est la dérivée de l'énergie par rapport à la longueur le long de l'axe  $\mathbf{x}$  :

$$f_x = \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial L_x} = \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial (\lambda L_{x_0})} = \frac{1}{L_{x_0}} \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial \lambda} = \frac{\nu_e k T}{L_{x_0}} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (2.20)$$

Enfin, la contrainte vraie, c'est-à-dire le rapport de la force longitudinale  $f_x$  sur l'aire de la section orthogonale déformée  $L_y L_z$ , est :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{vraie}} &= \frac{f_x}{L_y L_z} = \frac{\nu_e k T}{L_{x_0} L_y L_z} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{\nu_e k T}{L_{x_0} L_{y_0} L_{z_0}} \lambda \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{\nu_e k T}{V_0} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Le coefficient qui relie la contrainte et la déformation est appelé **module de cisaillement** (« shear modulus » en anglais) **du réseau réticulé non gonflé** et il est défini de la façon suivante :

$$C_0 = \frac{\nu_e k T}{V_0}.\quad (2.22)$$

En utilisant la définition (2.22), la contrainte vraie en traction simple  $\sigma_{\text{vraie}}$  s'écrit simplement

$$\sigma_{\text{vraie}} = C_0 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right),\quad (2.23)$$

Enfin, l'expression générale de la variation d'énergie de déformation totale dans le cas d'un réseau réticulé non gonflé (2.15) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} \left( \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 \right),\quad (2.24)$$

qui, dans le cas d'une cinématique isotrope, devient simplement :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} \left( 3\lambda^2 - 3 \right),\quad (2.25)$$

### *b. Cas d'un réseau réticulé gonflé.*

Supposons que le réseau initial, de volume  $V_0$ , subisse d'abord un gonflement isotrope le conduisant adopter un volume  $V_s$ , puis une déformation additionnelle ayant lieu à volume constant. Le volume final  $V$  après gonflement et déformation vérifie  $V = V_s$ . Notons  $\lambda_s$  l'élongation isotrope du réseau entre la configuration initiale et la configuration gonflée. On définit alors :

$$J_s = V_s/V_0 = \lambda_s^3,\quad (2.26)$$

où  $J_s$  représente le degré de gonflement. Notons  $\lambda'_x$ ,  $\lambda'_y$  et  $\lambda'_z$  les changements de dimension entre l'échantillon gonflé et non déformé et l'échantillon déformé.  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  et  $\lambda_z$  représentent les changements de dimension résultant de la déformation totale (gonflement et déformation additionnelle) et vérifient la relation

$$\lambda_x \lambda_y \lambda_z = V/V_0 = V_s/V_0 = J_s.\quad (2.27)$$

Comme précédemment, supposons que la déformation additionnelle consiste en une simple élongation (selon l'axe  $x$ ). On a alors :  $\lambda'_x = \lambda$  et  $\lambda'_y = \lambda'_z = 1/\sqrt{\lambda}$ , par conservation

du volume lors de cette déformation ( $\lambda'_x \lambda'_y \lambda'_z = 1$ ). Notant  $L'_x$ ,  $L'_y$  et  $L'_z$  les dimensions de l'échantillon gonflé non déformé, on dispose des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{L_x}{L_{x0}} = \frac{L_x}{L'_x} \frac{L'_x}{L_{x0}} = \lambda'_x \lambda_s = \lambda J_s^{1/3}, \\ \lambda_y &= \frac{L_y}{L_{y0}} = \frac{L_y}{L'_y} \frac{L'_y}{L_{y0}} = \lambda'_y \lambda_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_s^{1/3}, \\ \lambda_z &= \frac{L_z}{L_{z0}} = \frac{L_z}{L'_z} \frac{L'_z}{L_{z0}} = \lambda'_z \lambda_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_s^{1/3}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

La variation d'énergie de déformation totale par rapport à l'état initial non gonflé, donnée par l'équation (2.15), devient donc :

$$\begin{aligned}\Delta F_{\text{méca}} &= \frac{\nu_e k T}{2} \left( \lambda^2 J_s^{2/3} + \frac{2}{\lambda} J_s^{2/3} - 3 - \ln J_s \right) \\ &= \frac{\nu_e k T}{2} \left[ J_s^{2/3} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \right) - 3 - \ln J_s \right].\end{aligned}\quad (2.29)$$

La force longitudinale nécessaire pour déformer le réseau s'écrit :

$$f'_x = \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial L_x} = \frac{1}{L'_x} \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial \lambda} = \frac{\nu_e k T}{L'_x} J_s^{2/3} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (2.30)$$

La contrainte vraie, notée  $\sigma'_{\text{vraie}}$  et définie comme le rapport de la force  $f'_x$  sur l'aire de la section gonflée et déformée  $L_y L_z$  :

$$\begin{aligned}\sigma'_{\text{vraie}} &= \frac{f'_x}{L_y L_z} = \frac{\nu_e k T}{L'_x L_y L_z} J_s^{2/3} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{\nu_e k T}{J_s^{1/3} L_{x0} \lambda^{-1/2} J_s^{1/3} L_{y0} \lambda^{-1/2} J_s^{1/3} L_{z0}} J_s^{2/3} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{\nu_e k T}{V_0} J_s^{-1/3} \lambda \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = C_0 J_s^{-1/3} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right).\end{aligned}\quad (2.31)$$

A nouveau, il est possible de définir le **module de cisaillement d'un réseau réticulé gonflé**, que l'on notera  $C$ , de sorte que la containte vraie  $\sigma'_{\text{vraie}}$  par rapport à la section gonflée non déformée s'écrive :

$$\sigma'_{\text{vraie}} = C(J_s) \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (2.32)$$

Le module de cisaillement d'un réseau réticulé gonflé  $C$  s'écrit en fonction du module de cisaillement d'un réseau non gonflé  $C_0$  et du degré de gonflement  $J_s$  de la façon suivante :

$$C(J_s) = C_0 J_s^{-1/3}, \quad (2.33)$$

traduisant le fait que la raideur diminue avec le niveau de gonflement. Il est à noter que la relation (2.33) n'est valide que dans le cas des petites déformations des chaînes de polymère, c'est-à-dire pour de faibles degrés de gonflement (Vervoort, 2006). Pour des degrés de gonflement quelconques, Zrinyi et Horkay (1987) ont proposé un modèle phénoménologique qui relie le module de cisaillement d'un réseau réticulé gonflé et le degré de gonflement par rapport au degré de gonflement à l'équilibre, noté  $J_s^e$  :

$$C(J_s) = C^e \left( \frac{J_s}{J_s^e} \right)^{-1/3}, \quad (2.34)$$

où  $C^e$  désigne le module de cisaillement à l'équilibre.

L'expression générale de la variation d'énergie de déformation totale dans le cas d'un réseau réticulé gonflé (2.15) peut être exprimée selon différentes formes :

- en fonction des quantités par rapport à l'état de référence non gonflé (i.e en fonction de  $C_0$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  et  $\lambda_z$ ) :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} \left( \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3 - \ln J_s \right), \quad (2.35)$$

Dans le cas d'un gonflement isotrope,  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = J_s^{1/3}$  (cf équation (2.27)), l'équation ci-dessus devient :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} \left( 3J_s^{2/3} - 3 - \ln J_s \right). \quad (2.36)$$

- en fonction des quantités par rapport à l'état gonflé (i.e. en fonction de  $C(J_s)$ ,  $\lambda'_x$ ,  $\lambda'_y$  et  $\lambda'_z$ ) :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C(J_s)}{2} \left[ J_s \left( \lambda'^2_x + \lambda'^2_y + \lambda'^2_z \right) - 3J_s^{1/3} - J_s^{1/3} \ln J_s \right]. \quad (2.37)$$

**Remarque - Etat de référence.** L'état de référence est défini comme l'état dans lequel aucune force n'est appliquée sur les points de réticulation (Vervoort, 2006). Cependant, selon les auteurs, le point de vue diffère. Initialement, dans la théorie de Flory (1953), l'état de référence correspond à l'état dans lequel le polymère est non gonflé (i.e. entièrement sec) : les chaînes de polymères sont enchevêtrées sous la forme d'une pelote très compacte, et le réseau ne peut que gonfler au contact d'un solvant approprié. Dušek et Prins (1969) relient quant à eux l'état de référence à l'état du réseau dans les conditions de préparation, qui diffère de l'état sec. D'autres définitions, plus ou moins controversées, sont mentionnées par Quesada-Pérez *et al.* (2011) pour l'état de référence.

### 2.1.3 Couplage entre grandes déformations et gonflement

Comme cela a été évoqué dans l'introduction de ce chapitre, un gel consiste en un réseau réticulé de polymère gonflé dans lequel le gonflement est limité par la présence des points de réticulation, qui forment des liens permanents entre les chaînes. Lorsque le réseau s'imprègne de solvant, celui-ci tend à se dilater, entraînant ainsi un étirement élastique des chaînes de polymère entre les points de jonction. Ce phénomène s'oppose clairement au gonflement. Il en résulte une déformation à la fois importante, mais aussi réversible du réseau puisque le retrait du solvant entraîne le relâchement des chaînes de polymère.

Selon Flory (1953), la variation totale d'énergie libre d'un gel (ou d'un réseau réticulé gonflé, de manière générale) est due à deux contributions aux effets antagonistes :

- d'une part la variation d'énergie libre du mélange  $\Delta F_{\text{mix}}$ , qui tend à favoriser le gonflement ;
- d'autre part la variation d'énergie de déformation  $\Delta F_{\text{méca}}$ , due à l'étirement isotrope des chaînes de polymère, qui tend à s'opposer au gonflement.

Supposant que ces deux contributions sont additives, cela peut se résumer par :

$$\Delta F = \Delta F_{\text{mix}} + \Delta F_{\text{méca}}, \quad (2.38)$$

où l'énergie  $\Delta F_{\text{mix}}$ , donnée par l'expression (2.13), et  $\Delta F_{\text{méca}}$ , donnée par l'expression (2.36) si l'on suppose que le gonflement est isotrope, sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Delta F_{\text{mix}}(\phi) &= \frac{kT}{\nu} \frac{V_p}{\phi} [(1 - \phi) \ln(1 - \phi) + \chi \phi (1 - \phi)], \\ \Delta F_{\text{méca}}(J_s) &= V_0 \frac{C_0}{2} \left( 3J_s^{2/3} - 3 - \ln J_s \right), \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\phi = V_p/V$  désigne la fraction volumique de polymère et  $J_s = V/V_0$ ,  $V_0$  étant le volume de référence, désigne le degré de gonflement. Dans le cas où l'état de référence est l'état sec, le volume de référence est égal au volume de polymère sec, i.e.  $V_0 = V_p$ . On dispose alors de la relation suivante entre la fraction volumique de polymère et le degré de gonflement :

$$\phi = \frac{1}{J_s}. \quad (2.39)$$

Dans un souci de cohérence, il est possible d'exprimer l'énergie de mélange  $\Delta F_{\text{mix}}$  en fonction de  $J_s$  ou encore l'énergie mécanique  $\Delta F_{\text{méca}}$  en fonction de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \Delta F_{\text{mix}}(J_s) &= \frac{kT}{\nu} V_p (J_s - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{\chi}{J_s} \right] \\ \Delta F_{\text{méca}}(\phi) &= V_p \frac{C_0}{2} \left( 3\phi^{-2/3} - 3 + \ln \phi \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dès lors, on peut choisir d'exprimer la variation totale d'énergie libre indifféremment en fonction de  $\phi$  ou de  $J_s$  :

$$\Delta F(\phi) = \frac{kT}{\nu} \frac{V_p}{\phi} [(1 - \phi) \ln(1 - \phi) + \chi \phi (1 - \phi)] + V_p \frac{C_0}{2} \left( 3\phi^{-2/3} - 3 + \ln \phi \right), \quad (2.41)$$

$$\Delta F(J_s) = \frac{kT}{\nu} V_p (J_s - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{\chi}{J_s} \right] + V_p \frac{C_0}{2} \left( 3J_s^{2/3} - 3 - \ln J_s \right). \quad (2.42)$$

Par définition, le potentiel chimique du solvant dans le gel gonflé vaut :

$$\mu - \mu_0 = \frac{\partial \Delta F}{\partial n_f} = \left( \frac{\partial \Delta F_{\text{mix}}}{\partial n_f} + \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial n_f} \right), \quad (2.43)$$

où  $\mu_0$  désigne le potentiel chimique du solvant pur et  $n_f$  désigne le nombre de molécules de solvant (fluide). Rappelons que le volume courant  $V$  s'écrit comme la somme du volume de polymère  $V_p$  et du volume de solvant  $V_f = n_f \nu$ , i.e.  $V = V_p + n_f \nu$ . Donc

$$J_s = \frac{V}{V_p} = 1 + n_f \frac{\nu}{V_p}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_s}{\partial n_f} = \frac{\nu}{V_p}. \quad (2.44)$$

La dérivation par  $n_f$  donne alors :

$$\frac{\partial \Delta F_{\text{mix}}}{\partial n_f} = \frac{\partial \Delta F_{\text{mix}}}{\partial J_s} \frac{\partial J_s}{\partial n_f}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial n_f} = \frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial J_s} \frac{\partial J_s}{\partial n_f}, \quad (2.45)$$

où, d'après (2.40)<sub>1</sub>,

$$\frac{\partial \Delta F_{\text{mix}}}{\partial J_s} = V_p \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right], \quad (2.46)$$

et, d'après (2.36),

$$\frac{\partial \Delta F_{\text{méca}}}{\partial J_s} = V_p C_0 \left( J_s^{-1/3} - \frac{J_s}{2} \right). \quad (2.47)$$

Finalement, le potentiel chimique du solvant dans le gel s'écrit :

$$\mu - \mu_0 = kT \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] + \nu C_0 \left( J_s^{-1/3} - \frac{J_s}{2} \right). \quad (2.48)$$

L'équilibre chimique est atteint lorsque le potentiel chimique du solvant dans le gel est égal au potentiel chimique du solvant pur, c'est-à-dire lorsque  $\mu = \mu_0$ . Il est alors possible, d'après la théorie de Flory (1953), de prédire le degré de gonflement à l'équilibre chimique (noté  $J_s^e$ ). Ce dernier doit vérifier l'équation :

$$kT \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s^e} \right) + \frac{1}{J_s^e} + \frac{\chi}{(J_s^e)^2} \right] + \nu C_0 \left[ (J_s^e)^{-1/3} - \frac{J_s^e}{2} \right] = 0. \quad (2.49)$$

**Remarque - Paramètre d'interaction.** La détermination du paramètre d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$  pour un mélange solvant-polymère donné, lorsqu'il n'est pas connu, se fait par des expériences de gonflement jusqu'à l'équilibre, à température fixée.

#### 2.1.4 Modèles récents : généralisation au cadre tridimensionnel

Comme cela a été mentionné, l'ensemble des notions présentées dans les sections précédentes (notion de mélange solvant-polymère, notion d'élasticité d'un réseau réticulé, interaction entre les deux) ont été initialement formulées pour les élastomères gonflés, et permettent de prévoir le gonflement à l'équilibre. Pour les gels, même si le degré de gonflement est largement supérieur à celui des élastomères, ces notions restent vraies. Depuis les années 2000, l'intérêt pour les gels connaît un fort engouement grâce aux nombreuses applications dont ils font l'objet (Singh *et al.*, 2010). En particulier, les hydrogels (gels dont le solvant est l'eau), du fait de leur caractère biocompatible, sont largement utilisés dans l'ingénierie tissulaire (Clouet, 2010) et dans les domaines biomédicaux et pharmaceutiques - libération de médicaments, cicatrisation, pansements, lentilles de contact, couches, etc. (Peppas *et al.*, 2000 ; Pal *et al.*, 2009 ; Gibas et Janik, 2010) -, mais sont également présents en agriculture (Jhurry, 1997 ; Sannino, 2008) et l'industrie agroalimentaire (Farris *et al.*, 2009).

Ainsi, dans le but de développer de nouveaux champs d'application, il devient nécessaire de modéliser correctement la réponse mécanique de ces matériaux. Récemment, de nombreux auteurs, parmi lesquels on peut citer Hong *et al.* (2008), Duda *et al.* (2010), Chester et Anand (2010), Lucantonio *et al.* (2013) et Drozdov et Christiansen (2013a, b, c) ont proposé des théories couplant grandes déformations et diffusion adaptées à l'étude des gels en se plaçant dans le cadre tridimensionnel de la Mécanique de Milieux Continus moderne et en s'efforçant de décrire rigoureusement la cinématique, les lois de conservation,

et le formalisme thermodynamique qui conduisent à l'établissement des lois de comportement. On notera, notamment, que l'énergie de déformation d'un réseau réticulé gonflé, donnée par l'équation (2.35) en 1D, est transformée en 3D sous la forme :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - x \ln J_s), \quad (2.50)$$

où  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$  désigne le premier invariant associé au tenseur de déformation  $\mathbf{F}$  ; avec  $x$  un facteur dont la valeur varie selon les auteurs. En effet, selon Duda *et al.* (2010), Baek et Pence (2011) et Lucantonio *et al.* (2013),  $x$  est nul, ce qui entraîne la disparition du terme  $\ln J_s$ , pourtant nécessaire à la prise en compte du changement de volume dû au gonflement, dans l'équation (2.50). Selon Durning et Morman (1993), Baek et Srinivasa (2004) et Drozdov et Christiansen (2013b, c)  $x$  vaut 1, comme cela a initialement proposé par Flory (1953). Cependant, Holzapfel (2000) a montré que, afin de respecter l'hypothèse selon laquelle l'état de référence est libre de contrainte, il est nécessaire que  $x = 2$ . Cette dernière option a été suivie par Hong *et al.* (2008, 2009), Zhang *et al.* (2009a), Chester et Anand (2010), Kang et Huang (2010), Drozdov et Christiansen (2013a) notamment. Dans toute la suite, il a également été choisi de prendre  $x = 2$  ; dans ce cas, l'équation (2.50) s'écrit :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - 2 \ln J_s), \quad (2.51)$$

Les théories développées par Hong *et al.* (2008), Duda *et al.* (2010), Chester et Anand (2010) et Drozdov et Christiansen (2013a) permettent de déterminer analytiquement les états d'équilibre et (parfois) hors équilibre d'un gel sous contrainte mécanique et diffusion sur des exemples d'application qui restent assez simples (équilibre en gonflement libre de contrainte et en traction uniaxiale dans un bain de solvant, gonflement uniaxial hors équilibre, etc.). Il est important de noter que l'ensemble de ces travaux repose sur des lois de comportement formulées par rapport à une **configuration de référence dans laquelle le matériau est à l'état sec**. Très récemment, Lucantonio *et al.* (2013), et Drozdov et Christiansen (2013b, c) ont relevé l'importance d'introduire une configuration de référence qui diffère de l'état sec, et qui correspond à l'état dans lequel le matériau est libre de contrainte, c'est-à-dire à l'état de préparation du gel. La mise en œuvre numérique par la Méthode des Eléments Finis a été proposée par Hong *et al.* (2009), et Kang et Huang (2010) pour déterminer les états d'équilibre. A notre connaissance, seuls Kang et Huang (2010), Chester (2011) et Chester et Anand (2011) pour des gels thermo-sensibles et Lucantonio *et al.* (2013) effectuent la résolution hors équilibre de problèmes complexes par la Méthode des Eléments Finis.

### 2.1.5 Bilan

Les gels, constitués d'un réseau de chaînes de polymère réticulées pouvant absorber de large quantités de solvant, sont des matériaux remarquables par leur capacité à gonfler. Thermodynamiquement, ils sont rigoureusement semblables aux élastomères gonflés sur lesquels ont porté les premières études de Flory (1953) et Treloar (1975). Grâce aux nombreux domaines d'application possibles des gels, ces derniers ont récemment suscité l'intérêt de nombreux auteurs, qui se sont intéressés à leur étude en adaptant le travail de Flory au cadre 3D.

Néanmoins, parmi ces théories, deux points critiques, évoqués brièvement au cours de cette section, subsistent :

- la raideur (au travers du module de cisaillement) est conservée constante lors du gonflement, égale à celle dans l'état de référence, alors qu'il a été montré qu'elle dépend explicitement du degré de gonflement (cf équation (2.33)),
- la définition de l'état de référence n'est pas claire. Il s'agit de l'état sec, selon Flory (1953), et cela a largement été repris dans la littérature (Hong *et al.*, 2008 ; Duda *et al.*, 2010 ; Chester et Anand, 2010) malgré les recommandations de Dušek et Prins (1969).

L'étude approfondie de ces deux points, ainsi que leur prise en compte dans les lois de comportement feront l'objet des sections 2.3 et 2.4.

## 2.2 Rappel : équations d'équilibre d'un problème de mécanique/diffusion

Dans cette section, les **équations d'équilibre décrivant un problème de mécanique couplé à un problème de diffusion d'espèces moléculaires pour des solides capables d'absorber un fluide** sont rappelées. Le mélange fluide/solide est traité comme un milieu continu et homogène permettant le transport de fluide. Alors que les lois de conservation sont déduites par Duda *et al.* (2010) en adaptant la formulation des puissances virtuelles proposée par Podio-Guidugli (2009), l'approche plus traditionnelle et directe développée par Fried et Gurtin (1999) ou Gurtin *et al.* (2010) pour le couplage déformation/diffusion d'espèces moléculaires est adoptée ici.

Il est à noter que, puisque le temps caractéristique du processus de diffusion de fluide est habituellement beaucoup plus long que le temps caractéristique associé à la propagation d'ondes, les effets d'inertie sont négligés.

Soit  $\mathcal{B}$  un solide non déformé occupant un volume  $V_0$  dans sa configuration de référence et un volume  $V$  dans sa configuration déformée. Soit  $P$  un point arbitraire de  $\mathcal{B}$  de coordonnées  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence et  $\mathbf{x}$  dans la configuration déformée. L'application  $\varphi$  telle que  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$  désigne la déformation de la configuration de référence, dont le gradient est défini par le tenseur  $\mathbf{F}$  tel que<sup>2</sup> :

$$\mathbf{F} = \text{Grad}\varphi. \quad (2.52)$$

### *Equations d'équilibre mécanique.*

Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  est défini de sorte que le vecteur contrainte  $\mathbf{T}$  s'exerçant sur une portion de surface  $\partial\mathcal{P}$ , de normale  $\mathbf{N}$ , du sous-domaine  $\mathcal{P}$

---

2. On utilise ici les notations standard de la Mécanique des Milieux Continus en description cinématique Lagrangienne totale. En particulier, Grad et Div désignent respectivement le gradient et la divergence par rapport au point matériel  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence, et grad et div désignent les mêmes opérateurs par rapport au point  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$  dans la configuration déformée. Le point situé au-dessus d'une variable désigne la dérivée matérielle temporelle. Enfin,  $\text{tr}\mathbf{A}$  et  $\det \mathbf{A}$  désignent la trace et le déterminant d'un tenseur  $\mathbf{A}$ .



d'un solide  $\mathcal{B}$ <sup>3</sup> soit donné par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \quad (2.53)$$

On dispose alors de la relation suivante entre le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.54)$$

L'équation de conservation de la force s'écrit, sous forme globale :

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{P}\mathbf{N} \, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_0 \, dV = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

avec  $\mathbf{b}_0$  le vecteur des efforts extérieurs par unité de **volume de référence**. En utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{Div} \mathbf{P} \, dV + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_0 \, dV = \mathbf{0}. \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) étant vraie quel que soit le sous-domaine  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ , on en déduit la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, exprimée dans la configuration de référence :

$$\mathbf{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

Par ailleurs, le tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  étant symétrique, le tenseur de Piola-Kirchhoff, défini par l'équation (2.54) vérifie la relation

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T, \quad (2.58)$$

qui constitue la forme locale de l'équation de conservation du moment cinétique, exprimée dans la configuration de référence.

### *Equation d'équilibre chimique.*

Soit  $c$  le nombre de molécules de fluide absorbées par le réseau polymère par unité de volume de référence, c'est-à-dire la teneur en fluide. Afin de décrire le transport de fluide, on introduit le vecteur  $\mathbf{J}$ , mesuré par unité de surface de référence par unité de temps tel que  $-\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{N} dA$  représente le nombre de molécules de fluide entrant dans  $\mathcal{P}$  à travers la portion de surface  $\partial \mathcal{P}$  et par unité de temps. Le vecteur  $\mathbf{N}$  désignant la normale extérieure à  $\partial \mathcal{P}$ , le terme  $-\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{N} dA$  est bien positif lorsque le flux  $\mathbf{J}$  est entrant dans  $\mathcal{P}$ .

Dans ce cas, l'équation de conservation de la quantité de fluide s'écrit :

$$\overline{\int_{\mathcal{P}} \dot{c} \, dV} = - \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{N} \, dA, \quad (2.59)$$

quel que soit le sous-domaine  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ . A l'aide du théorème de la divergence, et en ramenant la dérivée à l'intérieur de l'intégrale, on a :

$$\int_{\mathcal{P}} \dot{c} \, dV = - \int_{\mathcal{P}} \mathbf{Div} \mathbf{J} \, dV. \quad (2.60)$$

On en déduit donc l'équation locale d'équilibre chimique, exprimée dans la configuration de référence :

$$\dot{c} = -\mathbf{Div} \mathbf{J}. \quad (2.61)$$

---

3. Il est à noter que les quantités  $\mathcal{B}$ ,  $\partial \mathcal{P}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{P}$  sont des quantités relatives à la configuration de référence, non déformée et non contrainte.

### *Second Principe de la Thermodynamique.*

Le Second Principe de la Thermodynamique postule que la variation d'énergie libre dans un sous-domaine quelconque  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$  doit être inférieure ou égale à la somme de la puissance  $\mathcal{W}(\mathcal{P})$  des efforts exercés sur  $\mathcal{P}$  et de l'énergie transportée dans  $\mathcal{P}$  par le flux d'espèces moléculaires  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\overline{\int_{\mathcal{P}} \dot{\Psi} dV} \leq \mathcal{W}(\mathcal{P}) + \mathcal{T}(\mathcal{P}), \quad (2.62)$$

où  $\Psi$  désigne la **densité d'énergie libre par unité de volume de référence**, et où

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dA + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dV \quad (2.63)$$

et

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}) = - \int_{\partial\mathcal{P}} \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{N} dA. \quad (2.64)$$

Le premier terme de l'équation (2.63) peut s'écrire, en utilisant le théorème de la divergence, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.57) et le fait que  $\mathbf{Grad} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\mathbf{F}}$  :

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dA = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{Div} \mathbf{P} + \mathbf{P} : \mathbf{Grad} \dot{\boldsymbol{\varphi}}) dV = \int_{\mathcal{P}} (-\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{b}_0 + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}) dV \quad (2.65)$$

A nouveau à l'aide du théorème de la divergence et de l'équation locale de conservation de la masse d'espèce chimique (2.61), l'équation (2.64) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{P}) &= - \int_{\mathcal{P}} \text{Div} (\mu \mathbf{J}) dV = - \int_{\mathcal{P}} (\mu \text{Div} \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu) dV \\ &= - \int_{\mathcal{P}} (-\mu \dot{c} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu) dV. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Enfin, en ramenant la dérivée à l'intérieur de l'intégrale, le terme de gauche de l'inégalité (2.62) vaut :

$$\overline{\int_{\mathcal{P}} \dot{\Psi} dV} = \int_{\mathcal{P}} \dot{\Psi} dV. \quad (2.67)$$

En introduisant les équations (2.63) à (2.67) dans l'inégalité (2.62) vérifiée par l'énergie libre, on obtient :

$$\int_{\mathcal{P}} \dot{\Psi} dV \leq \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \dot{c} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu) dV. \quad (2.68)$$

La dissipation interne, définie comme la différence entre le terme de droite et le terme de gauche dans l'équation (2.68), s'écrit

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \dot{c} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu - \dot{\Psi}) dV \geq 0. \quad (2.69)$$

En postulant l'existence d'une densité  $\delta_{\text{int}}$  (mesurée par unité de volume de référence) telle que :

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \int_{\mathcal{P}} \delta_{\text{int}} dV, \quad (2.70)$$

il vient :

$$\delta_{\text{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \dot{c} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu - \dot{\Psi} \geq 0. \quad (2.71)$$

Guidé par cette dernière expression (2.71), la densité d'énergie libre sera recherchée sous la forme  $\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{F}, c)$ , et le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  et le potentiel chimique  $\mu$  seront alors déterminés par des équations constitutives de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, c) \\ \mu = \mu(\mathbf{F}, c), \end{cases} \quad (2.72)$$

#### Bilan :

Les équations d'équilibre d'un problème couplé mécanique/diffusion sont rappelées ci-dessous, en considérant les restrictions imposées par le cadre thermodynamique. La résolution d'un tel problème nécessite, en outre, la donnée de conditions aux limites appropriées.

##### ■ Equations d'équilibre :

– Problème mécanique :

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 &= \mathbf{0} && \text{dans } (\mathcal{B}) \\ \mathbf{P}\mathbf{N} &= \mathbf{P}_d && \text{sur } (\partial\mathcal{B}_P) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d && \text{sur } (\partial\mathcal{B}_u) \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $\mathbf{P}_d$  représente le vecteur contrainte des efforts extérieurs imposés sur la frontière  $(\partial\mathcal{B}_P)$  et  $\mathbf{u}_d$  représente le déplacement imposé sur la frontière  $(\partial\mathcal{B}_u)$ .

– Problème de diffusion :

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\text{Div} \mathbf{J} && \text{dans } (\mathcal{B}) \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{N} &= J_d && \text{sur } (\partial\mathcal{B}_J) \\ \mu &= \mu_d && \text{sur } (\partial\mathcal{B}_\mu) \end{aligned} \quad (2.74)$$

où  $J_d$  représente le flux de solvant imposé sur la frontière  $(\partial\mathcal{B}_J)$  et  $\mu_d$  le potentiel chimique imposé sur la frontière  $(\partial\mathcal{B}_\mu)$ .

##### ■ Restriction thermodynamique :

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \dot{c} - \dot{\Psi} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu \geq 0 \quad \text{dans } (\mathcal{B}), \quad (2.75)$$

avec  $\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{F}, c)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, c)$  et  $\mu = \mu(\mathbf{F}, c)$ .

## 2.3 Déviation par rapport à la théorie classique

### 2.3.1 Motivation

Comme cela a été évoqué au cours de la section 2.1, dans la théorie de Flory (1953), la raideur (au travers du module de cisaillement) est gardée constante et égale à celle dans l'état de référence. Dans la mesure où le degré de gonflement des élastomères est

faible, cette hypothèse est relativement raisonnable. Dans le cas des gels ou du NP, le degré de gonflement est beaucoup plus important. Les modèles dits classiques développés par [Hong \*et al.\* \(2008\)](#), [Duda \*et al.\* \(2010\)](#), [Chester et Anand \(2010\)](#) suivent directement la proposition de Flory. Dans cette section, nous proposons de **développer un modèle prenant en compte la dépendance de la raideur vis-à-vis du gonflement**.

## 2.3.2 Dérivation du modèle

### 2.3.2.1 Cinématique

Les hypothèses de travail sont les suivantes : on considère un matériau de type « gel », homogène et isotrope. Le mélange fluide/solide est traité comme un milieu continu permettant le transport de fluide. En outre, le réseau polymère et le fluide sont supposés intrinsèquement incompressibles. Enfin, en suivant la théorie de [Flory \(1953\)](#) comme dans la quasi-totalité des études récentes sur les gels ([Hong \*et al.\* \(2008, 2009\)](#) ; [Duda \*et al.\* \(2010\)](#) ; [Chester et Anand \(2010\)](#) par exemple), on considère que **l'état de référence est l'état sec**. Autrement dit, le gel se trouve initialement dans un état sec, libre de contrainte.

En s'inspirant des approches classiques mises en place initialement pour l'étude de la plasticité ([Lee, 1969](#)), de la viscoélasticité ([Sidoroff, 1974](#)), de la compressibilité ([Ogden, 1984](#)), et plus généralement étendues à la plupart des problèmes traitant des grandes déformations ([Lubarda, 2004](#)), on considère, en chaque point matériel  $\mathbf{X}$ , une décomposition multiplicative du gradient de la déformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}\mathbf{F}_s, \quad (2.76)$$

telle que :

- $\mathbf{F}_s$  représente le gradient de la déformation associé au gonflement dû à l'absorption des molécules de fluide par le réseau de polymère à partir de l'état de référence sec. Le gonflement étant supposé isotrope, notant  $J_s = \det \mathbf{F}_s$ , on peut alors écrire

$$\mathbf{F}_s = J_s^{1/3} \mathbf{I}. \quad (2.77)$$

- $\mathbf{f}$  représente le gradient de la déformation purement mécanique, qui est isochore ( $j = \det \mathbf{f} = 1$ ).

Le déterminant de  $\mathbf{F}$  vaut donc simplement :

$$\det \mathbf{F} = (\det \mathbf{f})(\det \mathbf{F}_s) = J_s. \quad (2.78)$$

La Figure 2.5 représente schématiquement cette décomposition multiplicative sur un volume élémentaire représentatif.

Notons  $V_p$  le volume total du réseau polymère, et  $V_f$  le volume de fluide absorbé par le réseau. Puisque le matériau est sec dans son état de référence, on a  $V_0 = V_p$ . En faisant l'hypothèse que la variation de volume entre la configuration de référence et la configuration courante est uniquement due à l'absorption de molécules de fluide, on a  $V = V_p + V_f$ . Ainsi, le changement de volume s'écrit :

$$J_s = \frac{V}{V_0} = 1 + \frac{V_f}{V_p}. \quad (2.79)$$

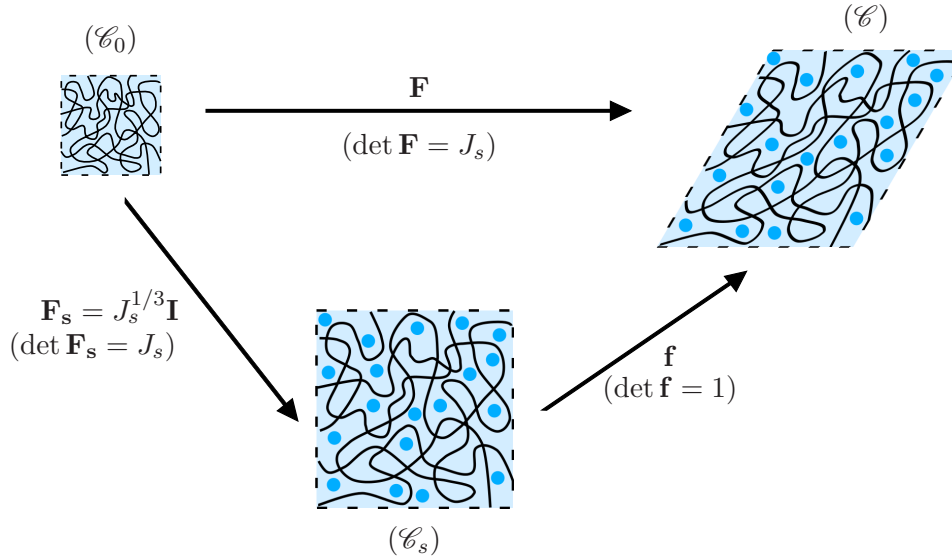


FIGURE 2.5 – Schéma représentatif de la décomposition multiplicative du gradient de la déformation  $\mathbf{F} = \mathbf{f}\mathbf{F}_s$  sur un volume représentatif élémentaire, avec  $(\mathcal{C}_0)$  la configuration de référence,  $(\mathcal{C})$  la configuration courante (gonflée et déformée), et  $(\mathcal{C}_s)$  la configuration intermédiaire (gonflée). Cas où l'état de référence est un état sec.

En introduisant  $\nu$  le volume d'une molécule de fluide et  $n_f$  le nombre de molécules de fluide absorbées par le réseau, le volume de fluide absorbé par le réseau vaut  $V_f = n_f\nu$ . On a alors la relation

$$J_s = 1 + \frac{n_f\nu}{V_p} = 1 + \nu c \quad (2.80)$$

où

$$c = \frac{n_f}{V_p} = \frac{n_f}{V_0} \quad (2.81)$$

désigne le nombre de molécules de fluide absorbées par le réseau par unité de volume de référence, c'est-à-dire la teneur en fluide. L'équation (2.80) est connue au travers de la littérature sous le nom de **relation d'incompressibilité moléculaire**.

### 2.3.2.2 Théorie constitutive

D'après l'expression (2.71), on suppose initialement que  $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, c)$ , où  $\mathbf{F}$  et  $c$  sont en réalité les « variables observables » du problème. Cependant, le gradient de la déformation totale  $\mathbf{F}$  étant relié au gradient de la transformation  $\mathbf{f}$  entre la configuration gonflée et la configuration actuelle par la décomposition (2.76), et la quantité  $c$  étant reliée à  $J_s$  par la relation d'incompressibilité moléculaire (2.80), la densité d'énergie libre peut prendre la forme :

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\mathbf{f}, J_s), \quad (2.82)$$

avec  $\mathbf{f}$  et  $J_s$  les « variables de travail ». Le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  et le potentiel chimique  $\mu$  sont alors déterminés par des équations constitutives de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{f}, J_s) \\ \mu = \mu(\mathbf{f}, J_s), \end{cases} \quad (2.83)$$

et le flux de molécules  $\mathbf{J}$  par une équation de la forme

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{f}, J_s, \mathbf{Grad}\mu). \quad (2.84)$$

Dans un souci de plus grande lisibilité, le terme de dépendance des différentes grandeurs en fonction de  $(\mathbf{f}, J_s)$  ou  $(\mathbf{F}, c)$  sera omis par la suite ; il sera seulement précisé dans les cas qui pourraient être ambigus.

L'expression de la dissipation (2.71) peut donc être réécrite en fonction des nouvelles variables de travail  $\mathbf{f}$  et  $J_s$  en remarquant que

$$\dot{\mathbf{F}} = \overline{\dot{\mathbf{F}}_s \mathbf{f}} = \overline{J_s^{1/3} \dot{\mathbf{f}}} = \frac{1}{3} J_s^{-2/3} \dot{J}_s \mathbf{f} + J_s^{1/3} \dot{\mathbf{f}}, \quad (2.85)$$

et

$$\dot{c} = \frac{\dot{J}_s}{\nu}. \quad (2.86)$$

De plus, la dérivée temporelle de la densité d'énergie libre,  $\dot{\Psi}$ , s'écrit :

$$\dot{\Psi} = \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} : \dot{\mathbf{f}} + \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} \dot{J}_s. \quad (2.87)$$

L'équation de dissipation (2.71) devient donc :

$$\mathbf{P} : \left( \frac{1}{3} J_s^{-2/3} \dot{J}_s \mathbf{f} + J_s^{1/3} \dot{\mathbf{f}} \right) + \frac{\mu}{\nu} \dot{J}_s - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} : \dot{\mathbf{f}} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} \dot{J}_s - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad}\mu \geq 0, \quad (2.88)$$

ce qui peut être ré-arrangé, en rassemblant les termes en  $\dot{\mathbf{f}}$  d'une part et les termes en  $\dot{J}_s$  d'autre part, selon :

$$\left( J_s^{1/3} \mathbf{P} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \right) : \dot{\mathbf{f}} + \left( \frac{1}{3} J_s^{-2/3} \mathbf{P} : \mathbf{f} + \frac{\mu}{\nu} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} \right) \dot{J}_s - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad}\mu \geq 0. \quad (2.89)$$

La procédure de Coleman-Noll (Coleman et Noll, 1963) est ensuite appliquée afin de déterminer la forme des équations constitutives.

### *a. Relation contrainte/déformation.*

En considérant d'abord tous les processus purement isochores tels que  $\dot{J}_s = 0$ , avec  $\mathbf{Grad}\mu = \mathbf{0}$  dans l'inéquation (2.89), on obtient :

$$\left( J_s^{1/3} \mathbf{P} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \right) : \dot{\mathbf{f}} = 0, \quad (2.90)$$

qui doit être satisfaite quel que soit  $\mathbf{f}$  tel que  $j = \det \mathbf{f} = 1$  (du fait de l'incompressibilité du polymère). Or,

$$\det \mathbf{f} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\det \mathbf{f}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\det \mathbf{f}) \mathbf{f}^{-T} : \dot{\mathbf{f}} = 0. \quad (2.91)$$

Il existe donc  $q$ , scalaire, classiquement appelé « pression hydrostatique » tel que :

$$\left( J_s^{1/3} \mathbf{P} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \right) = -q \mathbf{f}^{-T}. \quad (2.92)$$

Le scalaire  $q$  peut être également vu comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité  $(j - 1) = 0$ .

Finalement, la **relation contrainte/déformation sous forme générale** est donnée par les expressions (équivalentes) suivantes :

– contrainte de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{P} = -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \quad (2.93)$$

– contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{P} \left( J_s^{1/3} \mathbf{f}^T \right) = -qJ_s^{-1} \mathbf{I} + J_s^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \mathbf{f}^T. \quad (2.94)$$

Ces deux grandeurs peuvent également être exprimées en fonction du gradient de la transformation totale  $\mathbf{F}$ . On a alors :

$$\mathbf{P} = -q\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{I}, \quad (2.95)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} = -qJ_s^{-1} \mathbf{I} + J_s^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.96)$$

### *b. Relation potentiel chimique/teneur en fluide.*

On considère à présent tous les processus purement diffusifs, i.e.  $\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$ , avec  $\mathbf{Grad} \mu = \mathbf{0}$  dans l'inéquation (2.89). Le potentiel chimique  $\mu$  satisfait l'équation :

$$\left( \frac{1}{3} J_s^{-2/3} \mathbf{P} : \mathbf{f} + \frac{\mu}{\nu} - \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} \right) j_s = 0, \quad (2.97)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{\nu} = \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3} J_s^{-2/3} \mathbf{P} : \mathbf{f}. \quad (2.98)$$

Le produit  $\mathbf{P} : \mathbf{f}$  est calculé à l'aide l'expression de  $\mathbf{P}$  donné par l'équation (2.93), et en utilisant le fait que  $\mathbf{f}^{-T} : \mathbf{f} = \text{tr}(\mathbf{f}^{-1} \mathbf{f}) = \text{tr} \mathbf{I} = 3$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathbf{f} &= \left( -qJ_s^{-1/3} \mathbf{f}^{-T} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \right) : \mathbf{f} = -qJ_s^{-1/3} \mathbf{f}^{-T} : \mathbf{f} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} : \mathbf{f} \\ &= -3qJ_s^{-1/3} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} : \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Ainsi, le dernier terme de l'équation (2.98) est égal à :

$$\frac{1}{3} J_s^{-2/3} \mathbf{P} : \mathbf{f} = -qJ_s^{-1} + \frac{1}{3} J_s^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} : \mathbf{f}. \quad (2.100)$$

Or, d'après l'équation (2.94), on a

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -3qJ_s^{-1} + J_s^{-1} \text{tr} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \bigg|_{J_s} \mathbf{f}^T \right) = -3qJ_s^{-1} + J_s^{-1} \text{tr} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \bigg|_{J_s} : \mathbf{f} \right). \quad (2.101)$$

Donc

$$\frac{1}{3} J_s^{-2/3} \mathbf{P} : \mathbf{f} = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.102)$$

Finalement, en introduisant (2.102) dans l'équation (2.98), on obtient l'expression générale du potentiel chimique :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \bigg|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.103)$$

### c. Flux de solvant.

Dès lors que les équations constitutives - contrainte (2.93), (2.95), (2.94) ou (2.96) et potentiel chimique (2.103) - sont établies, l'inégalité (2.89) provenant de l'expression de la dissipation interne est réduite à l'expression :

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu \geq 0. \quad (2.104)$$

Suivant les hypothèses proposées par Chester et Anand (2010), on suppose d'une part que le flux de solvant  $\mathbf{J}$  obéit à une loi du type :

$$\mathbf{J} = -\mathbf{M} \mathbf{Grad} \mu, \quad (2.105)$$

où  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{f}, J_s)$  est le tenseur de mobilité.

D'autre part, si l'on restreint notre attention aux matériaux isotropes (qui restent isotropes tout au long de la déformation),  $\mathbf{M}$  peut être exprimé en fonction des invariants  $i_1$  et  $i_2$  du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \mathbf{f}$  associé à la déformation isovolume (on rappelle que  $i_3 = j^2 = 1$ ), ainsi que de  $J_s$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{M} = \tilde{m}(i_1, i_2, J_s) \mathbf{I}, \quad (2.106)$$

où  $m$  est une fonction scalaire positive, et

$$i_1 = \text{tr} \mathbf{c} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{1}{2} \left( (\text{tr} \mathbf{c})^2 - \text{tr}(\mathbf{c}^2) \right). \quad (2.107)$$

Finalement, le flux de solvant est donné par l'expression :

$$\mathbf{J} = -\tilde{m}(i_1, i_2, J_s) \mathbf{Grad} \mu. \quad (2.108)$$



**Bilan :**

Les équations constitutives du problème couplé mécanique/diffusion s'écrivent sous la forme générale :

## ■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{P}(\mathbf{f}, J_s) = -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \quad (2.109)$$

ou

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}, c) = -q\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{I} \quad (2.110)$$

– Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f}, J_s) = -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + J_s^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \mathbf{f}^T \quad (2.111)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}, c) = -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + J_s^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (2.112)$$

## ■ Potentiel chimique :

$$\frac{\mu(\mathbf{f}, J_s)}{\nu} = \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.113)$$

## ■ Flux de solvant :

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}, J_s) = -\tilde{m}(i_1, i_2, J_s) \mathbf{Grad} \mu \quad (2.114)$$

### 2.3.2.3 Spécialisation de la théorie

Jusqu'à présent, les équations constitutives ont été écrites de manière très générale en fonction de la densité d'énergie libre par unité de volume de référence  $\Psi$ . Il s'agit maintenant de proposer une formulation spécifique pour  $\Psi$  adaptée au cas des gels, puis de déterminer la contrainte  $\mathbf{P}$  ou  $\boldsymbol{\sigma}$ , le potentiel chimique  $\mu$  et le flux  $\mathbf{J}$ .

Tout d'abord, comme cela a été proposé initialement par [Flory \(1953\)](#) (cf section 2.1.3), on fait l'hypothèse que la densité d'énergie libre peut se décomposer de façon additive selon :

$$\Psi = \Psi_{\text{pur}} + \Psi_{\text{mix}} + \Psi_{\text{méca}}, \quad (2.115)$$

où  $\Psi_{\text{pur}}$  désigne la contribution à la variation d'énergie libre du solvant pur,  $\Psi_{\text{mix}}$  représente la contribution due au mélange solvant-polymère, et  $\Psi_{\text{méca}}$  est la contribution à la variation d'énergie libre due à la déformation du réseau de chaînes de polymère. Il est à noter que toutes ces contributions sont exprimées par unité de volume de référence  $V_0 = V_p$  (état sec). Classiquement ([Hong et al., 2008, 2009](#) ; [Duda et al., 2010](#) ; [Chester et Anand, 2010](#)), c'est-à-dire en utilisant les variables de travail  $\mathbf{F}$  et  $c$ , l'équation (2.115) se réécrit :

$$\Psi(\mathbf{F}, c) = \Psi_{\text{pur}}(c) + \Psi_{\text{mix}}(c) + \Psi_{\text{méca}}(\mathbf{F}). \quad (2.116)$$

En utilisant la relation d'incompressibilité moléculaire donnée par l'équation (2.80), cette relation peut également s'écrire en fonction des variables  $\mathbf{F}$  et  $J_s$  sous la forme :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{F}, J_s) = \hat{\Psi}_{\text{pur}}(J_s) + \hat{\Psi}_{\text{mix}}(J_s) + \hat{\Psi}_{\text{méca}}(\mathbf{F}). \quad (2.117)$$

Concernant les deux premiers termes de cette expression, la littérature s'accorde à choisir :

- pour la contribution du solvant pur à la variation de la densité d'énergie libre :

$$\Psi_{\text{pur}}(c) = \mu_0 c, \quad (2.118)$$

où  $\mu_0$  désigne le potentiel chimique du solvant pur ; c'est-à-dire, en fonction des variables  $\mathbf{F}$  et  $J_s$ ,

$$\hat{\Psi}_{\text{pur}}(J_s) = \frac{\mu_0}{\nu} (J_s - 1). \quad (2.119)$$

- pour la contribution du mélange à la variation de la densité d'énergie libre :

$$\hat{\Psi}_{\text{mix}}(J_s) = \frac{\Delta F_{\text{mix}}}{V_p} = \frac{kT}{\nu} (J_s - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{\chi}{J_s} \right], \quad (2.120)$$

provenant de l'expression (2.40)<sub>1</sub> proposée par Flory (1953) pour la variation d'énergie libre totale ramenée par unité de volume de référence.

**Remarque - Ecriture de la densité d'énergie de mélange en fonction de  $c$ .** L'expression de la densité d'énergie de mélange exprimée en fonction de  $c$ , utilisée par Chester et Anand (2010), Lucantonio *et al.* (2013) et Drozdov et Christiansen (2013a) s'écrit de façon équivalente sous la forme :

$$\Psi_{\text{mix}}(c) = kTc \left[ \ln \left( \frac{\nu c}{1 + \nu c} \right) + \frac{\chi}{1 + \nu c} \right]. \quad (2.121)$$

Il est à noter que l'expression proposée par Hong *et al.* (2008, 2009) et Zhang *et al.* (2009a) diffère légèrement d'une constante, ce qui est insignifiant concernant la prédiction de la contrainte et du potentiel chimique (Kang et Huang, 2010).

C'est sur le dernier terme dans l'expression (2.116), le terme  $\Psi_{\text{méca}}(\mathbf{F})$  représentant la contribution à la variation d'énergie libre due à la déformation du réseau de chaînes de polymère, que notre intérêt va se porter. En effet, dans cette section, il sera d'abord question de décrire la théorie classique pour les gels proposée récemment par Hong *et al.* (2008), Hong *et al.* (2009), Duda *et al.* (2010) et Chester et Anand (2010) par exemple, puis de proposer une **théorie alternative plus générale prenant en compte l'évolution du module de cisaillement en fonction du gonflement**.

### a. Théorie classique

La densité d'énergie mécanique par unité de volume de référence  $V_0$ , généralisée au cadre de la Mécanique des Milieux Continus tridimensionnelle est issue de l'équation (2.50) et donnée par :

$$\Psi_{\text{méca}}(\mathbf{F}) = \frac{\Delta F_{\text{méca}}}{V_0} = \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - 2 \ln J_s), \quad (2.122)$$

où  $C_0$  est le module de cisaillement du matériau dans son état de référence sec, et  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$  est le premier invariant de la déformation  $\mathbf{F}$ . En utilisant la relation

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \text{tr} \left[ \left( J_s^{1/3} \mathbf{f} \right)^T \left( J_s^{1/3} \mathbf{f} \right) \right] = J_s^{2/3} \text{tr}(\mathbf{f}^T \mathbf{f}) = J_s^{2/3} i_1, \quad (2.123)$$

où  $i_1$  est le premier invariant de la transformation  $\mathbf{f}$ , on obtient :

$$\tilde{\Psi}_{\text{méca}}(\mathbf{f}, J_s) = \frac{C_0}{2} \left( J_s^{2/3} i_1 - 3 - 2 \ln J_s \right), \quad (2.124)$$

Dès lors, le calcul des dérivées de  $\tilde{\Psi}$  donne :

– par rapport à  $\mathbf{f}$  :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} = \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\text{méca}}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} = \frac{C_0}{2} J_s^{2/3} \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{f}} = C_0 J_s^{2/3} \mathbf{f}, \quad (2.125)$$

– par rapport à  $J_s$  :

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial J_s} = \frac{d\tilde{\Psi}_{\text{pur}}}{dJ_s} + \frac{d\tilde{\Psi}_{\text{mix}}}{dJ_s} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\text{méca}}}{\partial J_s}, \quad (2.126)$$

avec

$$\frac{d\tilde{\Psi}_{\text{pur}}}{dJ_s} = \frac{\mu_0}{\nu}, \quad (2.127)$$

$$\frac{d\tilde{\Psi}_{\text{mix}}}{dJ_s} = \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right], \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_{\text{méca}}}{\partial J_s} = C_0 \left( \frac{1}{3} J_s^{-1/3} i_1 - J_s^{-1} \right). \quad (2.129)$$

En substituant la relation (2.125) dans les expressions (2.109) et (2.111), on obtient l'expression générale des contraintes selon la théorie classique :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -q J_s^{-1/3} \mathbf{f}^{-T} + C_0 J_s^{1/3} \mathbf{f} = -q \mathbf{F}^{-T} + C_0 \mathbf{F}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= -q J_s^{-1} \mathbf{I} + C_0 J_s^{-1/3} \mathbf{b} = -q J_s^{-1} \mathbf{I} + C_0 J_s^{-1} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.130)$$

où  $\mathbf{b} = \mathbf{f} \mathbf{f}^T$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T$  désignent le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche associé aux déformations  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{F}$  respectivement. On a alors :

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -3q J_s^{-1} + C_0 J_s^{-1/3} i_1. \quad (2.131)$$

En substituant la relation (2.126) dans l'expression (2.113) et en utilisant la relation (2.131), on obtient l'expression générale du potentiel chimique selon la théorie classique :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] + J_s^{-1} (q - C_0). \quad (2.132)$$

Enfin, en suivant la proposition de Chester et Anand (2010) selon laquelle la mobilité est une fonction puissance de la teneur en fluide ( $m = \hat{m}(c) \equiv c^n$ , où  $n \geq 1$  est constant), la fonction mobilité s'écrit :

$$m = \tilde{m}(J_s) = \frac{D}{\nu kT} (J_s - 1)^n, \quad (2.133)$$

où  $D \geq 1$  est une constante représentant le coefficient de diffusion. Le flux de solvant (2.114) est finalement donné par :

$$\mathbf{J} = -\frac{D}{\nu kT} (J_s - 1)^n \mathbf{Grad} \mu \quad (2.134)$$

**Bilan :**

Les équations constitutives du problème couplé mécanique/diffusion selon la théorie classique sont finalement :

## ■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + C_0J_s^{1/3}\mathbf{f} \\ &= -q\mathbf{F}^{-T} + C_0\mathbf{F}\end{aligned}\quad (2.135)$$

– Cauchy :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_0J_s^{-1/3}\mathbf{b} \\ &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_0J_s^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}\quad (2.136)$$

## ■ Potentiel chimique :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] + J_s^{-1}(q - C_0) \quad (2.137)$$

## ■ Flux de solvant :

$$\mathbf{J} = -\frac{D}{\nu kT} (J_s - 1)^n \mathbf{Grad}\mu \quad (2.138)$$

***b. Déviation par rapport à la théorie classique : prise en compte de l'évolution du module de cisaillement en fonction du gonflement.***

Guidé par la décomposition de la déformation  $\mathbf{F} = \mathbf{f}\mathbf{F}_s$  (cf Figure 2.5), on propose désormais de décomposer la densité d'énergie de déformation sous la forme suivante :

$$\tilde{\Psi}_{\text{méca}}(\mathbf{f}, J_s) = \Psi_{J_s}^0(J_s) + J_s w_{J_s}(\mathbf{f}), \quad (2.139)$$

où le terme  $\Psi_{J_s}^0(J_s)$  désigne la densité d'énergie de déformation des chaînes de polymère (par unité de volume de référence) sous l'effet du gonflement, et où  $w_{J_s}(\mathbf{f})$  désigne la densité d'énergie de déformation par unité de volume gonflé pour la transformation purement mécanique (isovolume) caractérisée par le gradient de déformation  $\mathbf{f}$  (ainsi le terme  $J_s w_{J_s}(\mathbf{f})$  est bien exprimé par unité de volume de référence). Il est important de noter que les densités d'énergie  $\Psi_{J_s}^0$  et  $w_{J_s}$  dépendent de  $J_s$  de deux manières :

- par l'intermédiaire de  $\mathbf{f}$  en raison de la décomposition multiplicative rappelée en début de paragraphe,
- par l'intermédiaire des paramètres matériau qui dépendent explicitement du changement de volume (ceci est symbolisé par l'indice  $\cdot_{J_s}$ ). En effet, on considère ici que la raideur des chaînes de polymère est modifiée par l'absorption de solvant par le réseau (cf section 2.1.2).

Dès lors, les équations constitutives données par les équations (2.109) à (2.113) du problème peuvent être réécrites en fonction des nouvelles densités d'énergie :

■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{P} = -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + J_s^{-1/3} \left. \frac{\partial J_s w_{J_s}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} = -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + J_s^{2/3} \left. \frac{\partial w_{J_s}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s}. \quad (2.140)$$

– Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + \left. \frac{\partial w_{J_s}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} \mathbf{f}^T. \quad (2.141)$$

■ Potentiel chimique :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{d\tilde{\Psi}_{\text{pur}}}{dJ_s} + \frac{d\tilde{\Psi}_{\text{mix}}}{dJ_s} + \frac{d\Psi_{J_s}^0}{dJ_s} + w_{J_s} + J_s \left. \frac{\partial w_{J_s}}{\partial J_s} \right|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.142)$$

A nouveau, il s'agit maintenant de proposer une forme spécifique pour les différentes densités d'énergie mises en jeu. De la même manière que précédemment, on choisit une formulation classique de type néo-Hookéen pour le potentiel mécanique - que ce soit pour la déformation due au gonflement seul  $\Psi_{J_s}^0$  ou pour la déformation purement mécanique  $w_{J_s}$  mais on impose une dépendance explicite des paramètres matériau vis-à-vis du degré de gonflement  $J_s$ . Ceci conduit à écrire :

$$\Psi_{J_s}^0(J_s) = \frac{C_1(J_s)}{2} (I_{1,s} - 3 - 2 \ln J_s) = \frac{C_1(J_s)}{2} (3J_s^{2/3} - 3 - 2 \ln J_s), \quad (2.143)$$

où  $I_{1,s}$  désigne le premier invariant de la transformation  $\mathbf{F}_s$  et satisfait la relation

$$I_{1,s} = \text{tr}(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s) = \text{tr} \left[ \left( J_s^{1/3} \mathbf{I} \right)^T \left( J_s^{1/3} \mathbf{I} \right) \right] = \text{tr} \left( J_s^{2/3} \mathbf{I} \right) = 3J_s^{2/3}, \quad (2.144)$$

et

$$w_{J_s}(\mathbf{f}) = \frac{C_2(J_s)}{2} (i_1 - 3 - 2 \ln j) = \frac{C_2(J_s)}{2} (i_1 - 3). \quad (2.145)$$

**Remarque - Equivalence avec le modèle classique.** Le modèle classique peut être vu comme un cas particulier du modèle avec prise en compte de l'évolution du module de cisaillement en fonction du gonflement. En effet, en considérant que le module de cisaillement est constant et égal au module de cisaillement dans l'état sec pendant la phase de gonflement (c'est-à-dire en prenant simplement  $C_1(J_s) = C_0$  dans l'expression (2.143)) et en considérant que le changement de module de cisaillement entre l'état sec et l'état gonflé est dû au changement de volume  $J_s$ , c'est-à-dire  $C_2(J_s) = C_0 J_s^{-1/3}$  dans l'expression (2.145), on a :

$$\begin{aligned} \Psi_{J_s}^0(J_s) + J_s w_{J_s}(\mathbf{f}) &= \frac{C_0}{2} (3J_s^{2/3} - 3 - 2 \ln J_s) + J_s \frac{C_0}{2} J_s^{-1/3} (i_1 - 3) \\ &= \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - 2 \ln J_s) \\ &= \Psi_{\text{méca}}(\mathbf{F}), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation (2.123). On retrouve bien l'expression (2.122). Le modèle avec prise en compte explicite de l'évolution du module de cisaillement en fonction du gonflement constitue donc une généralisation du modèle classique. On choisira donc de l'appeler dans toute la suite « **modèle généralisé** ».

Le calcul des dérivées mises en jeu dans les équations (2.140), (2.141) et (2.142) fournit :

$$\frac{d\Psi_{J_s}^0}{dJ_s} = C_1'(J_s) \left[ \frac{3}{2} (J_s^{2/3} - 1) - \ln J_s \right] + C_1(J_s) (J_s^{-1/3} - J_s^{-1}), \quad (2.146)$$

$$\left. \frac{\partial w_{J_s}}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} = \frac{C_2(J_s)}{2} \left. \frac{i_1}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s} = C_2(J_s) \mathbf{f}, \quad (2.147)$$

$$\left. \frac{\partial w_{J_s}}{\partial J_s} \right|_{J_s} = \frac{C_2'(J_s)}{2} (i_1 - 3), \quad (2.148)$$

où la notation  $\cdot'$  désigne la dérivation classique des fonctions  $C_1$  et  $C_2$  qui dépendent de la seule variable  $J_s$ .

En substituant l'équation (2.148) dans (2.140) et (2.141), on obtient l'expression générale de la contrainte selon le modèle généralisé :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -qJ_s^{-1/3} \mathbf{f}^{-T} + C_2(J_s) J_s^{2/3} \mathbf{f} = -q\mathbf{F}^{-T} + C_2(J_s) J_s^{1/3} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\sigma} &= -qJ_s^{-1} \mathbf{I} + C_2(J_s) \mathbf{b} = -qJ_s^{-1} \mathbf{I} + C_2(J_s) J_s^{-2/3} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

On a alors :

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -3qJ_s^{-1} + C_2(J_s) i_1, \quad (2.150)$$

et l'on observe une forme identique à celle fournie par l'équation (2.131), avec une simple généralisation de la forme de la raideur.

En substituant (2.146), (2.147) et (2.150) dans (2.142), on obtient, après simplification des calculs, l'expression générale du potentiel chimique selon le modèle généralisé :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\nu} &= \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] \\ &+ C_1(J_s) (J_s^{-1/3} - J_s^{-1}) + C_1'(J_s) \left[ \frac{3}{2} (J_s^{2/3} - 1) - \ln J_s \right] \\ &+ \frac{C_2(J_s)}{2} \left( \frac{1}{3} i_1 - 3 \right) + \frac{C_2'(J_s)}{2} J_s (i_1 - 3) \\ &+ qJ_s^{-1}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

**Bilan :**

Pour résumer, les équations constitutives pour le modèle généralisé sont :

## ■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + C_2(J_s)J_s^{2/3}\mathbf{f} \\ &= -q\mathbf{F}^{-T} + C_2(J_s)J_s^{1/3}\mathbf{F}\end{aligned}\quad (2.152)$$

– Cauchy :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_2(J_s)\mathbf{b} \\ &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_2(J_s)J_s^{-2/3}\mathbf{B}\end{aligned}\quad (2.153)$$

## ■ Potentiel chimique :

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\nu} &= \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] \\ &\quad + C_1(J_s) \left( J_s^{-1/3} - J_s^{-1} \right) + C_1'(J_s) \left[ \frac{3}{2} \left( J_s^{2/3} - 1 \right) - \ln J_s \right] \\ &\quad + \frac{C_2(J_s)}{2} \left( \frac{1}{3}i_1 - 3 \right) + \frac{C_2'(J_s)}{2} J_s (i_1 - 3) \\ &\quad + qJ_s^{-1}\end{aligned}\quad (2.154)$$

## ■ Flux de solvant (inchangé par rapport à l'équation (2.138)) :

$$\mathbf{J} = -\frac{D}{\nu kT} (J_s - 1)^n \mathbf{Grad}\mu \quad (2.155)$$

Pour les études qui seront présentées ci-après, on choisira la forme particulière suivante, qui permet d'apprécier les écarts par rapport à la théorie classique :

$$\begin{aligned}C_1(J_s) &= C_0 \\ C_2(J_s) &= C_0 J_s^{-1/3(1+\varepsilon)}.\end{aligned}\quad (2.156)$$

De cette façon, lorsque l'on se place dans le cas particulier où  $\varepsilon = 0$ , on est dans le cas de la théorie classique, et on retrouve les équations (2.135), (2.136) et (2.137). L'équation (2.156), avec l'introduction du facteur  $1 + \varepsilon$  dans l'exposant, permet donc de traiter des cas qui s'écartent de la théorie classique. En effet, Gundogan *et al.* (2002) ont montré que la dépendance en  $J_s$  du ratio  $C(J_s)/C_0$  du module de cisaillement lorsque le degré de gonflement vaut  $J_s$  sur le module de cisaillement initial peut varier par rapport à la valeur  $-1/3$ , et prendre des valeurs allant de  $-2$  (i.e.  $\varepsilon = 5$ ) à  $1/3$  (i.e.  $\varepsilon = -2$ ). Ainsi, deux « régimes » différents traduisant le comportement du gel peuvent être mis en évidence :

- le cas où  $\varepsilon > 0$  : le module diminue avec le gonflement (classique),
- le cas où  $\varepsilon < 0$  : le module augmente avec le gonflement, ce qui constitue un comportement plutôt surprenant mais qui pourrait traduire une certain raidissement sous l'effet d'un gonflement suffisamment fort.

Le calcul des dérivées des paramètres  $C_1$  et  $C_2$  par rapport à  $J_s$  donne :

$$\begin{aligned} C_1'(J_s) &= 0 \\ C_2'(J_s) &= -\frac{1}{3}(1+\varepsilon)C_0J_s^{-1/3(4+\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

En introduisant les équations (2.156) et (2.157) dans les expressions (2.152), (2.153) et (2.154), on obtient les lois de comportement suivantes, qui seront utilisées dans la suite :

■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -qJ_s^{-1/3}\mathbf{f}^{-T} + C_0J_s^{1/3(1-\varepsilon)}\mathbf{f} \\ &= -q\mathbf{F}^{-T} + C_0J_s^{-\varepsilon/3}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.158)$$

– Cauchy :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_0J_s^{-1/3(1+\varepsilon)}\mathbf{b} \\ &= -qJ_s^{-1}\mathbf{I} + C_0J_s^{-(1+\varepsilon/3)}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.159)$$

■ Potentiel chimique :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\nu} &= \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] \\ &\quad + C_0 \left[ J_s^{-1/3} - J_s^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) J_s^{-1/3(1+\varepsilon)} \right] + qJ_s^{-1} \end{aligned} \quad (2.160)$$

### 2.3.3 Mise en œuvre numérique

L'objectif de la résolution d'un problème couplé de mécanique et diffusion tel qu'il est résumé par les équations (2.73) et (2.74) est la connaissance de l'ensemble des grandeurs caractéristiques du problème : champ de contrainte  $\mathbf{P}$  ou  $\boldsymbol{\sigma}$ , potentiel chimique  $\mu$ , teneur en fluide  $c$ , degré de gonflement  $J_s$ , etc. en tout point du domaine et à tout instant.

Cependant, une solution analytique n'est accessible que dans des situations relativement simples. Dans tous les autres cas, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques permettant d'obtenir une approximation de la solution. Dans cette étude, la Méthode des Elément Finis est utilisée afin de calculer une solution approchée d'un tel problème. Il convient de préciser que les lois de comportement classiques décrivant le gonflement ont été développées très récemment (à partir des années 2000 environ) et ne sont intégrées dans aucun code de calcul commercial. Il a donc été nécessaire de les inclure « manuellement » dans le code de calcul choisi, aussi bien pour le modèle classique que pour le modèle généralisé.

Gardant à l'esprit que l'un des objectifs généraux de cette étude est la description du comportement du DIV aux temps longs (cf section 1.3.1), il a été choisi de limiter ce travail au cadre de la **résolution numérique des états d'équilibre**, c'est-à-dire lorsque l'équilibre chimique est établi. Les équations d'équilibre, données par (2.73) et (2.74) pour un problème de mécanique/diffusion complet à résoudre en tout point du domaine et à



tout instant, se réduisent donc dans ce cas aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 &= \mathbf{0} && \text{dans } (\mathcal{B}) \\
 \mathbf{P} \mathbf{N} &= \mathbf{P}_d && \text{sur } (\partial \mathcal{B}_P) \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d && \text{sur } (\partial \mathcal{B}_u) \\
 \mu &= \mu_d && \text{dans } (\mathcal{B}),
 \end{aligned} \tag{2.161}$$

avec  $\mathbf{P}$  et  $\mu$  donnés respectivement par les équations (2.135) et (2.137) pour le modèle classique, et (2.152) et (2.154) pour le modèle généralisé.

Cette section s'attache à décrire la mise en œuvre numérique par la Méthode des Elément Finis dans un code de calcul Eléments Finis : le choix du code de calcul, la stratégie d'implantation ainsi que la méthodologie mise en place sont décrits.

### 2.3.3.1 Choix du code de calcul et stratégie d'implantation

ABAQUS est un code de calcul Eléments Finis. En raison du large spectre de ses capacités d'analyse, il est très largement utilisé dans l'industrie automobile et aéronautique, et dans le milieu de la recherche. Initialement conçu pour analyser les comportements non-linéaires, ABAQUS possède une vaste gamme de modèles de comportement, et laisse également la possibilité à l'utilisateur d'implanter ses propres lois de comportement, par le biais de routines utilisateur.

La routine utilisateur UHYPER, en particulier, permet

- de définir un potentiel thermodynamique, autrement dit une densité d'énergie libre, pour des matériaux au comportement hyperélastique isotrope,
- d'inclure une dépendance du comportement vis-à-vis d'une variable de champ ou d'une variable d'état.

Dans notre cas, on a bien un matériau hyperélastique isotrope, dont le gonflement (c'est-à-dire le comportement) est piloté par la variable  $\mu$ , le potentiel chimique. En s'inspirant du travail de [Hong \*et al.\* \(2009\)](#), on remarque que cette variable a un rôle analogue à celui de la température dans un problème thermo-mécanique où le comportement du matériau dépend de la température. L'idée sera donc d'utiliser cette variable d'état qu'est la température afin de lui faire jouer le rôle du potentiel chimique.

### 2.3.3.2 Méthodologie

La routine utilisateur UHYPER nécessite la définition des variables suivantes ([ABAQUS 6.11, 2011](#)) :

- $U(1)$ , représentant la densité d'énergie libre  $U$
- $U(2)$ , représentant la partie déviatoire  $\tilde{U}_{\text{dev}}$  de la densité d'énergie libre, doit également être définie lorsque le comportement du matériau inclut l'effet Mullins. Dans notre cas, on aura  $U(2) = 0$ .
- les différentes dérivées d'ordre 1, 2 et 3 par rapport aux invariants réduits, dont les notations ABAQUS et leur définition sont résumées dans le tableau 2.1.

Toutes ces variables nécessitent en outre d'être exprimées en fonction des invariant réduits définis de la façon suivante : pour une déformation quelconque définie par le gradient

$\mathbf{F}_{\mathbf{q}}$  et caractérisée par un changement de volume  $J_q = \det \mathbf{F}_{\mathbf{q}}$ , notant  $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{q}} = J_q^{-1/3} \mathbf{F}_{\mathbf{q}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{q}}^T$ , on notera :

$$\begin{aligned}\bar{I}_{1,q} &= \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}}) \\ \bar{I}_{2,q} &= \frac{1}{2} \left[ \bar{I}_{1,q}^2 - \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}})^2 \right] \\ \bar{I}_{3,q} &= \det \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}} = J_q^2.\end{aligned}\tag{2.162}$$

<b>variable</b>	UI1(1)	UI1(2)	UI1(3)	UI2(1)	UI2(2)
<b>définition</b>	$\partial U / \partial \bar{I}_1$	$\partial U / \partial \bar{I}_2$	$\partial U / \partial J$	$\partial^2 U / \partial \bar{I}_1^2$	$\partial^2 U / \partial \bar{I}_2^2$
<b>variable</b>	UI2(3)	UI2(4)	UI2(5)	UI2(6)	UI3(1)
<b>définition</b>	$\partial^2 U / \partial J^2$	$\partial^2 U / \partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2$	$\partial^2 U / \partial \bar{I}_1 \partial J$	$\partial^2 U / \partial \bar{I}_2 \partial J$	$\partial^3 U / \partial \bar{I}_1^2 \partial J$
<b>variable</b>	UI3(2)	UI3(3)	UI3(4)	UI3(5)	UI3(6)
<b>définition</b>	$\partial^3 U / \partial \bar{I}_2^2 \partial J$	$\partial^3 U / \partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2 \partial J$	$\partial^3 U / \partial \bar{I}_1 \partial J^2$	$\partial^3 U / \partial \bar{I}_2 \partial J^2$	$\partial^3 U / \partial J^3$

TABLEAU 2.1 – Correspondance entre les notations des variables ABAQUS de la routine utilisateur UHYPER et leur définition.

L'écriture de la densité d'énergie libre, établie précédemment pour le modèle classique et le modèle généralisé (cf section 2.3.2.2), doit donc être modifiée afin de respecter les conditions requises pour l'implantation dans ABAQUS. Ceci s'articule autour de différentes étapes, qui sont décrites ci-dessous. Dans un souci de meilleure lisibilité, ces étapes seront entièrement décrites dans le cas du modèle classique, car les équations qui interviennent sont légèrement moins lourdes que celles du modèle généralisé. Pour ce dernier, seule la formulation finale sera proposée, les étapes de calcul y conduisant étant rigoureusement identiques.

■ **Etape 1. Effectuer une transformation de Legendre** pour passer de la variable  $c$  (que l'on ne connaît pas *a priori*) à la variable  $\mu$  qui pilote le gonflement et que l'on va imposer comme un chargement. La transformation de Legendre de  $\Psi$  (représentée par l'indice  $\cdot_{\mathcal{L}}$ ) s'écrit :

$$\Psi_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}, \mu) = \Psi(\mathbf{F}, c) - \mu c.\tag{2.163}$$

En utilisant la relation d'incompressibilité moléculaire (2.80), ceci équivaut à :

$$\hat{\Psi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}, \mu) = \hat{\Psi}(\mathbf{F}, J_s) - \frac{\mu}{\nu} (J_s - 1).\tag{2.164}$$

En combinant l'équation (2.164) avec les équations (2.115), (2.119), (2.120) et (2.122), l'expression de la densité d'énergie après transformation de Legendre s'écrit :

$$\hat{\Psi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}, \mu) = \frac{kT}{\nu} (J_s - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{\chi}{J_s} \right] + \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - 2 \ln J_s) - \frac{\mu - \mu_0}{\nu} (J_s - 1). \quad (2.165)$$

■ **Etape 2. Modifier l'état initial pour éviter les problèmes numériques lorsque  $J_s = 1$ .** Posons  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{F}_0$  avec  $\mathbf{F}_0 = \lambda_0 \mathbf{I}$  (on a donc  $\det \mathbf{F}_0 = \lambda_0^3$ ). En pratique, on choisira  $\lambda_0$  très proche de 1 afin de décaler au minimum l'état initial tout en évitant la singularité numérique ( $\lambda_0 = 1,0001$ , par exemple). On a alors la relation suivante entre le déterminant  $J_s$  de  $\mathbf{F}$  et le déterminant  $J'_s$  de  $\mathbf{F}'$  :

$$J_s = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}' \det \mathbf{F}_0 = J'_s \det \mathbf{F}_0, \quad (2.166)$$

et la relation suivante entre le premier invariant  $I_1$  de  $\mathbf{F}$  et celui de  $\mathbf{F}'$ , noté  $I'_1$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}'\mathbf{F}_0(\mathbf{F}'\mathbf{F}_0)^T) = \text{tr}(\mathbf{F}'\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^T\mathbf{F}'^T) = \text{tr}(\lambda_0^2\mathbf{F}'\mathbf{F}'^T) \\ &= \lambda_0^2 \text{tr}(\mathbf{F}'\mathbf{F}'^T) = \lambda_0^2 I'_1. \end{aligned} \quad (2.167)$$

L'équation (2.165) peut donc être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}', \mu) &= \frac{kT}{\nu} (J'_s \det \mathbf{F}_0 - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right] \\ &\quad + \frac{C_0}{2} [\lambda_0^2 I'_1 - 3 - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0)] \\ &\quad - \frac{\mu - \mu_0}{\nu} (J'_s \det \mathbf{F}_0 - 1). \end{aligned} \quad (2.168)$$

On définit ainsi une nouvelle densité d'énergie  $\hat{\Psi}'_{\mathcal{L}}$  telle que :

$$\hat{\Psi}'_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}', \mu) = \frac{\hat{\Psi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}', \mu)}{\det \mathbf{F}_0}. \quad (2.169)$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}', \mu) &= \frac{kT}{\nu} \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right] \\ &\quad + \frac{C_0}{2 \det \mathbf{F}_0} [\lambda_0^2 I'_1 - 3 - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0)] \\ &\quad - \frac{\mu - \mu_0}{\nu} \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right). \end{aligned} \quad (2.170)$$

■ **Etape 3. Exprimer la densité d'énergie en fonction des invariants réduits.**

La subroutine UHYPER requiert, de façon générale, pour une densité d'énergie  $\Psi$  associée à un gradient de déformation  $\mathbf{F}$  d'exprimer cette dernière en fonction de ses invariants réduits (ici, puisque seul le premier invariant est utilisé, nous nous limiterons à la donnée de ce dernier), où

$$\bar{I}_1 = \text{tr}(\overline{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}) = J_s^{-2/3} \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = J_s^{-2/3} I_1 = (\det \mathbf{F})^{-2/3} I_1. \quad (2.171)$$

Dans notre cas, il s'agit donc d'exprimer la densité d'énergie  $\widehat{\Psi}'_{\mathcal{L}}$  en fonction de son invariant réduit  $\bar{I}'_1$ , où :

$$\bar{I}'_1 = (\det \mathbf{F}')^{-2/3} I'_1 = J_s'^{-2/3} I'_1. \quad (2.172)$$

L'expression (2.170) devient donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}'_{\mathcal{L}}(\mathbf{F}', \mu) = & \frac{kT}{\nu} \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right] \\ & + \frac{C_0}{2 \det \mathbf{F}_0} \left[ \lambda_0^2 J_s'^{2/3} \bar{I}'_1 - 3 - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0) \right] \\ & - \frac{\mu - \mu_0}{\nu} \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right). \end{aligned} \quad (2.173)$$

■ **Etape 4. Adimensionnaliser par  $kT/\nu$ .**

En effet, l'ordre de grandeur des constantes concernées est le suivant :  $\nu \approx 10^{-29} - 10^{-28} \text{ m}^3$  pour le volume d'une molécule de solvant,  $k \approx 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  pour la constante de Boltzmann et  $T \approx 10^2 \text{ K}$  pour la température. Si l'on restreint l'étude à des matériaux dont le module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  est compris entre  $10^3$  et  $10^6 \text{ Pa}$ , le rapport  $C_0 \nu / kT$  a pour ordre de grandeur  $10^{-5} - 10^{-1}$ . Le fait d'adimensionnaliser les expressions par  $kT/\nu$  permet donc d'éviter des problèmes numériques liés à l'utilisation de très petites valeurs numériques. L'expression (2.173) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}'_{\mathcal{L}, \text{adim}}(\mathbf{F}', \mu) = & \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} - \frac{\mu - \mu_0}{kT} \right] \\ & + \frac{1}{2\gamma \det \mathbf{F}_0} \left[ \lambda_0^2 J_s'^{2/3} \bar{I}'_1 - 3 - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0) \right], \end{aligned} \quad (2.174)$$

où  $\gamma$  est défini par la relation :

$$\gamma = \frac{kT}{\nu C_0}. \quad (2.175)$$

Pour le modèle généralisé, en considérant que le module de cisaillement dépend explicitement du degré gonflement par l'intermédiaire de  $C_1(J_s)$  et  $C_2(J_s)$ , on obtient, en suivant exactement les étapes 1 à 4 décrites ci-dessus :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}'_{\mathcal{L}, \text{adim}}(\mathbf{F}', \mu) = & \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} - \frac{\mu - \mu_0}{kT} \right] \\ & + \frac{C_1(J'_s \det \mathbf{F}_0)}{2 \det \mathbf{F}_0} \frac{\nu}{kT} \left[ 3 \left( J_s'^{2/3} \det \mathbf{F}_0^{2/3} - 1 \right) - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0) \right] \\ & + \frac{C_2(J'_s \det \mathbf{F}_0)}{2} \frac{\nu}{kT} J'_s \left( \bar{I}'_1 - 3 \right). \end{aligned} \quad (2.176)$$

En pratique, en utilisant les expressions données par (2.156) pour  $C_1(J_s)$  et  $C_2(J_s)$  et la relation (2.175), on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}'_{\mathcal{L}, \text{adim}}(\mathbf{F}', \mu) = & \left( J'_s - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J'_s \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J'_s \det \mathbf{F}_0} - \frac{\mu - \mu_0}{kT} \right] \\ & + \frac{1}{2\gamma \det \mathbf{F}_0} \left[ 3 \left( J_s'^{2/3} \det \mathbf{F}_0^{2/3} - 1 \right) - 2 \ln (J'_s \det \mathbf{F}_0) \right] \\ & + \frac{1}{2\gamma} (J'_s \det \mathbf{F}_0)^{-1/3(1+\varepsilon)} J'_s \left( \bar{I}'_1 - 3 \right). \end{aligned} \quad (2.177)$$

L'expression (2.174) étant un cas particulier de (2.177) lorsque  $\varepsilon = 0$ , seule cette dernière expression, a finalement été implémentée dans le code de calcul Eléments Finis ABAQUS au moyen de la routine utilisateur UHYPER, dont le code est disponible en Annexe A. Le langage utilisé est Fortran. Le calcul des dérivées nécessaires figurant dans le tableau 2.1 a été effectué grâce à la « Toolbox Symbolic » de Matlab permettant l'exécution de calculs mathématiques symboliques.

Il est à noter que la mise en œuvre de la loi de comportement donnée par (2.177) nécessite la **donnée de trois paramètres matériau à renseigner par l'utilisateur**<sup>4</sup>

- le module de cisaillement à l'état sec  $C_0$ ,
- la valeur du paramètre  $\varepsilon$ ,
- le paramètre d'interaction polymère-solvant de Flory-Huggins  $\chi$ .

### 2.3.4 Quelques applications

Ce paragraphe illustre la mise en œuvre numérique de résolution d'un problème de mécanique/diffusion sur des exemples d'application, dans le cas classique ( $\varepsilon = 0$ ) et dans le cas généralisé ( $\varepsilon$  quelconque). La détermination des états d'équilibre en gonflement libre, gonflement uniaxial, et traction/compression uniaxiale et gonflement combinés est d'abord proposée : les solutions obtenues par la Méthode des Eléments Finis (EF) sont comparées aux solutions analytiques connues (section 2.3.4.1). Enfin, afin de mieux comprendre les équations et leur couplage, la résolution numérique d'un exemple hors équilibre (gonflement uniaxial transitoire), dont la solution analytique peut être calculée, est également traitée (cf section 2.3.4.2). Pour les application numériques, on choisira, dans toute cette section,  $\nu = 10^{-28} \text{ m}^3$ , ce qui constitue une valeur représentative pour le volume d'une molécule de solvant, selon Hong *et al.* (2008).

#### 2.3.4.1 Etats d'équilibre

Dans les trois exemples d'application qui suivent, la solution analytique est connue et peut être calculée aisément (le détail des calculs est précisé). Cette solution est déterminée dans le cas général, c'est-à-dire en considérant  $\varepsilon$  quelconque *a priori*. La connaissance de cette solution permet d'étudier et de comprendre l'influence des paramètres matériau ( $C_0$ ,  $\chi$ ,  $\varepsilon$ ). La comparaison avec les résultats obtenus par la Méthode des Eléments Finis permet, en outre, de valider l'implantation dans la routine utilisateur UHYPER.

#### a. Gonflement libre de contrainte

##### ■ Description du problème :

Dans ce premier exemple, le gonflement isotrope d'un échantillon cubique à température ambiante ( $T = 20 \text{ °C}$ ) est étudié. Celui-ci, supposé initialement sec, est immergé dans un bain de solvant dont le potentiel chimique est constant et égal à  $\mu_0$ , et subit un gonflement isotrope et libre de contrainte, comme l'illustre la Figure 2.6.

---

4. en pratique, comme cela est visible dans l'Annexe A, un quatrième paramètre (qui n'est pas un paramètre matériau) est à renseigner par l'utilisateur : le paramètre  $\lambda_0$  qui représente le décalage de l'état initial. On choisira  $\lambda_0 = 1,0001$  pour s'affranchir des problèmes numériques sans pour autant dégrader les résultats.

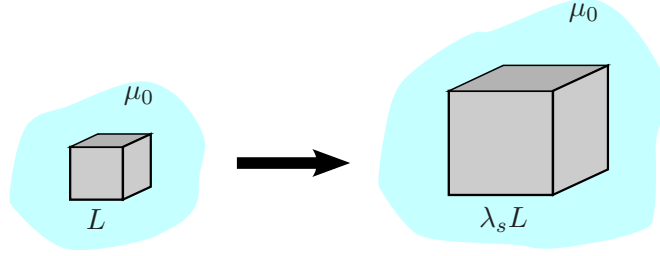


FIGURE 2.6 – Gonflement libre de contrainte d’un cube dans un excès de solvant.  $L$  : longueur du côté du cube non déformé (état initial sec) ;  $\lambda_s L$  : longueur du côté du cube déformé,  $\lambda_s$  représentant l’élongation (identique dans les trois directions de l’espace).

#### ■ Résolution EF :

Dans ABAQUS/CAE, un modèle de cube de côté 1 mm est réalisé. Afin d’éviter les mouvements de solide rigide, le sommet de coordonnées  $(0, 0, 0)$  est encastré. La variation de potentiel chimique normalisée  $(\mu - \mu_0)/(kT)$  (par abus de langage, on utilisera le terme « potentiel chimique ») est imposée comme un chargement volumique uniforme à l’aide de la fonction « champ prédéfini » (« predefined field ») : il est amené à varier graduellement d’une valeur initiale donnée  $(\mu - \mu_0)/(kT)|_{\text{init}}$ <sup>5</sup> à 0, correspondant à l’équilibre chimique, comme le montre la Figure 2.7. Le maillage est réalisé avec les éléments C3D8H hexaédriques linéaires avec une formulation hybride (afin de gérer correctement l’incompressibilité intrinsèque de la phase solide).

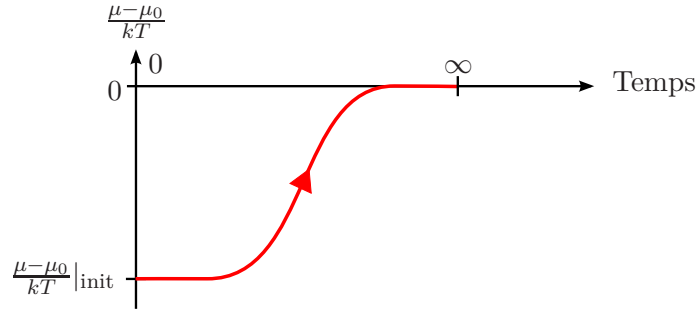


FIGURE 2.7 – Définition du chargement imposé en terme de potentiel chimique.

Le gonflement libre de contrainte du cube obtenu par EF est illustré sur la Figure 2.8. La distribution spatiale du champ de contrainte est représentée dans l’état initial (non déformé) et dans l’état d’équilibre final. Le modèle EF permet de vérifier que le champ de contrainte est uniformément nul. En outre, on vérifie que le champ de déformation est uniforme (dans l’état d’équilibre déformé, la forme est toujours cubique).

#### ■ Résolution analytique :

Notant  $\lambda_s$  l’élongation (identique dans les trois directions de l’espace), le gradient de la déformation est donné par

$$\mathbf{F} = \lambda_s \mathbf{I}, \quad (2.178)$$

5. La valeur initiale  $(\mu - \mu_0)/(kT)|_{\text{init}}$  est déterminée en considérant le fait que le matériau est isotrope, et initialement non déformé et non contraint. En pratique, cette valeur est calculée en utilisant la relation (2.182) déterminée ci-après, qui dépend des paramètres matériau considérés, avec  $\lambda_s = 1$ .

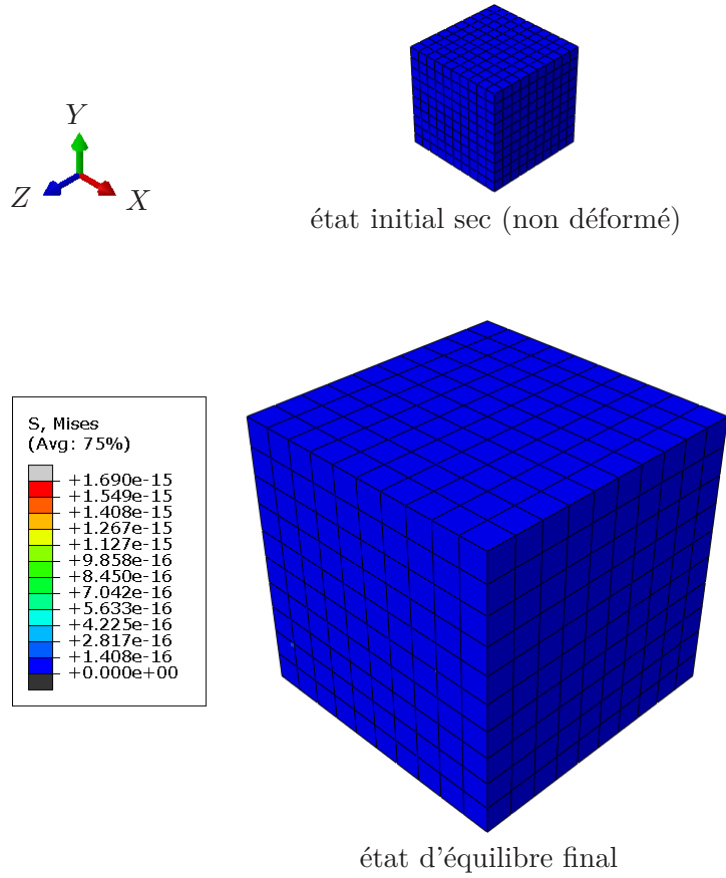


FIGURE 2.8 – Distribution spatiale du champ de contrainte lors du gonflement libre de contrainte du cube obtenu par EF, avec  $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0, 1$  et  $\varepsilon = 1$ .

i.e.  $\mathbf{F}_s = \lambda_s \mathbf{I}$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{I}$  dans l'équation (2.76), et  $J_s = \det \mathbf{F} = \lambda_s^3$ . Le problème étant libre de contrainte, il vérifie donc la relation

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{ou, de façon équivalente, } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}). \quad (2.179)$$

Enfin, l'équilibre chimique est atteint lorsque le potentiel chimique du gel est égal à celui du solvant, i.e.  $\mu = \mu_0$ .

En introduisant les relations (2.178) et (2.179) dans (2.158) et (2.160), on obtient alors les deux équations suivantes :

$$q = C_0 \lambda_s^{2-\varepsilon} \quad (2.180)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\mu - \mu_0}{\nu} = \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda_s^3} \right) + \frac{1}{\lambda_s^3} + \frac{\chi}{\lambda_s^6} \right] \\ + C_0 \left[ \lambda_s^{-1} - \lambda_s^{-3} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) \lambda_s^{-(1+\varepsilon)} \right] + q \lambda_s^{-3}. \end{aligned} \quad (2.181)$$

En introduisant l'équation (2.180) dans l'équation (2.181) et en normalisant par  $kT/\nu$ , on obtient la relation

$$\frac{\mu - \mu_0}{kT} = \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda_s^3} \right) + \frac{1}{\lambda_s^3} + \frac{\chi}{\lambda_s^6} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[ \lambda_s^{-1} - \lambda_s^{-3} + \frac{\varepsilon}{3} \lambda_s^{-(1+\varepsilon)} \right], \quad (2.182)$$

qui permet de prédire l'élongation  $\lambda_s$  en fonction du potentiel chimique. L'**équation d'équilibre en gonflement libre de contrainte** vérifiée par  $\lambda_s^e$  (l'élongation à l'équilibre) est finalement donnée par la relation :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{(\lambda_s^e)^3} \right) + \frac{1}{(\lambda_s^e)^3} + \frac{\chi}{(\lambda_s^e)^6} \right] + (\lambda_s^e)^{-1} - (\lambda_s^e)^{-3} + \frac{\varepsilon}{3} (\lambda_s^e)^{-(1+\varepsilon)} = 0. \quad (2.183)$$

■ **Influence des paramètres matériau sur le comportement :**

La Figure 2.9 montre le comportement du matériau en gonflement libre de contrainte, pour différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon$ . L'élongation est représentée en fonction de la variation de potentiel chimique. On remarque que le comportement à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ , est modifié selon la valeur prise par le paramètre  $\varepsilon$ .

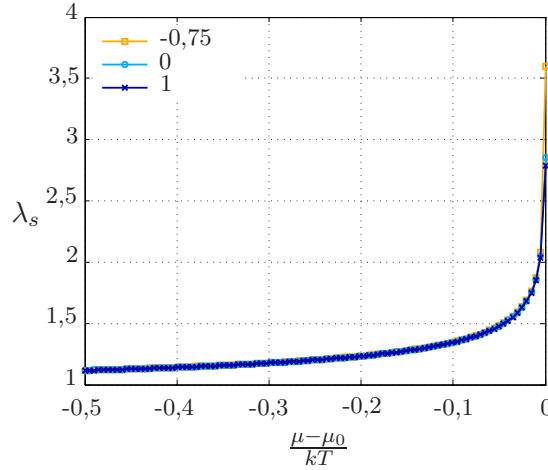


FIGURE 2.9 – Influence du paramètre  $\varepsilon$  sur le comportement en gonflement libre de contrainte. L'élongation est représentée en fonction du potentiel chimique pour  $\varepsilon = -0,75, 0$  et  $1$  (avec  $C_0 = 10^5$  Pa et  $\chi = 0, 1$  fixés). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

La Figure 2.10 montre l'influence du module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  (Figure 2.10a) et du coefficient d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$  (Figure 2.10b) sur l'équilibre en gonflement libre de contrainte. L'élongation à l'équilibre  $\lambda_s^e$  est représentée en fonction du paramètre  $\varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon > 0$ , ce dernier a très peu d'influence sur l'équilibre, quels que soient  $C_0$  et  $\chi$ . Lorsque  $\varepsilon < 0$ , une diminution de  $\varepsilon$  entraîne une augmentation du gonflement à l'équilibre, quels que soient  $C_0$  et  $\chi$ . On rappelle que, d'après les observations de Gundogan *et al.* (2002), lorsque  $\varepsilon > 0$  on se situe dans le régime classique dans lequel le module diminue avec le gonflement ; lorsque  $\varepsilon < 0$ , on a affaire à un régime traduisant un raidissement sous l'effet du gonflement.

On constate, en outre, que l'augmentation de la raideur (via une augmentation de  $C_0$ ) entraîne une diminution du gonflement ; autrement dit,  $C_0$  **faible favorise le gonflement**. Ceci s'explique par le fait que les chaînes formant le réseau sont plus raides, ce qui rend plus difficile leur étirement sous l'action de la pénétration des molécules de solvant à l'intérieur du réseau, et entraîne un gonflement moindre. De même, une augmentation du paramètre d'interaction  $\chi$  entraîne une diminution du gonflement, autrement dit  $\chi$  **faible favorise le gonflement**. En effet, une faible valeur de  $\chi$  témoigne d'une grande affinité chimique entre le solvant et le réseau, ce qui provoque une bonne absorption de fluide par le réseau, et donc un gonflement important.



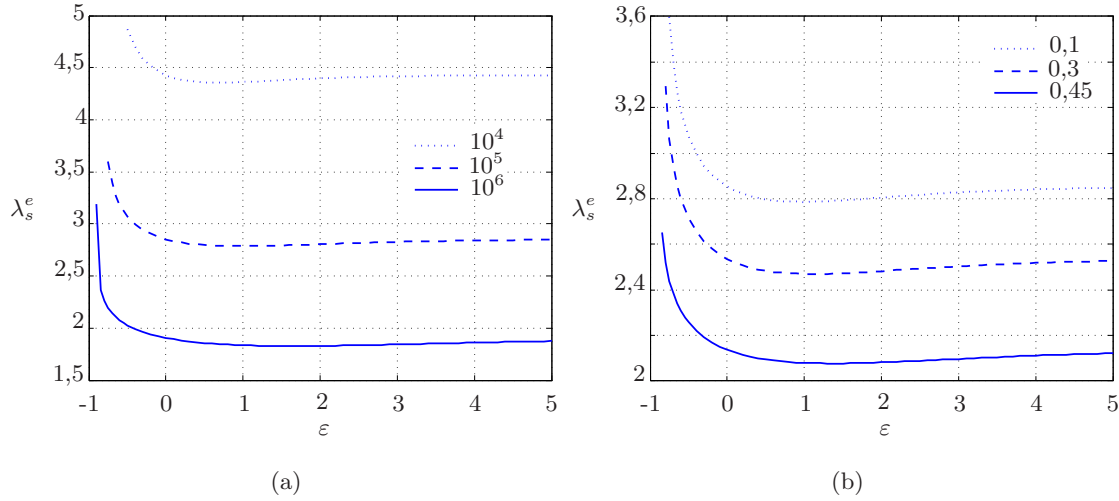


FIGURE 2.10 – Influence des paramètres matériau sur le comportement en gonflement libre de contrainte : (a) influence du module de cisailment à l'état sec  $C_0$  (avec  $\chi = 0,1$  fixé) ; (b) influence du paramètre d'interaction  $\chi$  (avec  $C_0 = 10^5$  Pa fixé). L'élongation à l'équilibre  $\lambda_s^e$  est représentée en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .

#### ■ Comparaison des résultats analytique et EF :

La Figure 2.11 illustre l'évolution de l'élongation  $\lambda_s$  lorsque l'on fait évoluer graduellement le potentiel chimique, donnée par la résolution analytique de l'équation (2.182), avec  $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 0$ . Les résultats obtenus par la Méthode des Eléments Finis sont également inclus sur cette figure. La superposition des résultats analytiques et EF permet de valider l'implantation EF par la routine utilisateur UHYPER.

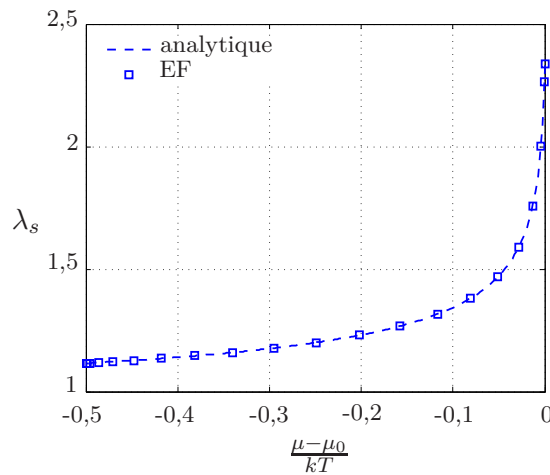


FIGURE 2.11 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de gonflement libre de contrainte. L'élongation est représentée en fonction du potentiel chimique ( $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 0$ ). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

#### b. Gonflement uniaxial

### ■ Description du problème :

Un échantillon dont l'épaisseur (dans la direction  $Y$ ) est faible par rapport aux deux dimensions du plan ( $X, Z$ ), est posé sur un substrat rigide, puis mis en contact avec un solvant de potentiel chimique  $\mu_0$ , à température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$ ). L'échantillon est alors libre de gonfler dans la direction normale au plan, et se trouve ainsi soumis à un état de contrainte équibiaxiale, comme l'illustre la Figure 2.12.

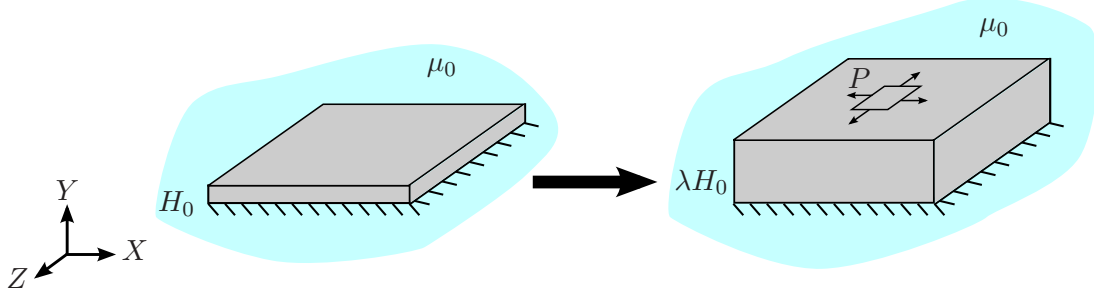


FIGURE 2.12 – Schéma illustrant le gonflement uniaxial d'un échantillon dans un excès de solvant.  $H_0$  : épaisseur non déformée (état initial sec) ;  $\lambda H_0$  : épaisseur dans l'état déformé ( $\lambda$  représentant l'élongation dans la direction  $Y$ ) ;  $P$  : contrainte (de Piola-Kirchhoff) dans le plan ( $X, Z$ ).

### ■ Résolution EF :

Dans ABAQUS/CAE, une pavé d'épaisseur 1 mm dans la direction  $Y$  et de côté 10 mm selon  $X$  et  $Z$  est considéré. Dans le plan  $Y = 0$ , les nœuds sont fixés dans toutes les directions afin de représenter le contact avec le substrat rigide. Dans les plans  $X = 0$  et  $X = 10$ , le déplacement dans la direction  $X$  est nul ; de même, dans les plans  $Z = 0$  et  $Z = 10$ , le déplacement dans la direction  $Z$  est nul. Comme précédemment, le potentiel chimique est imposé (jusqu'à atteindre l'équilibre) comme un chargement uniforme à l'aide de la fonction illustrée sur la Figure 2.7. A nouveau, les éléments utilisés sont de type C3D8H (hexaédriques linéaires, formulation hybride).

Le gonflement uniaxial de la couche de gel obtenu par EF est illustré sur la Figure 2.13. La distribution spatiale de la contrainte  $\sigma_{11}$  normalisée par  $kT/\nu$  est représentée dans l'état initial (non déformé) et dans l'état d'équilibre final. On constate que  $\sigma_{11} < 0$  dans tout le domaine : le matériau résiste au gonflement.

### ■ Résolution analytique :

Notant  $\lambda$  l'élongation dans la direction  $Y$ , l'état de déformation est caractérisé par le gradient de transformation :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (J_s = \lambda), \quad (2.184)$$

et le tenseur des contraintes est donné par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}. \quad (2.185)$$

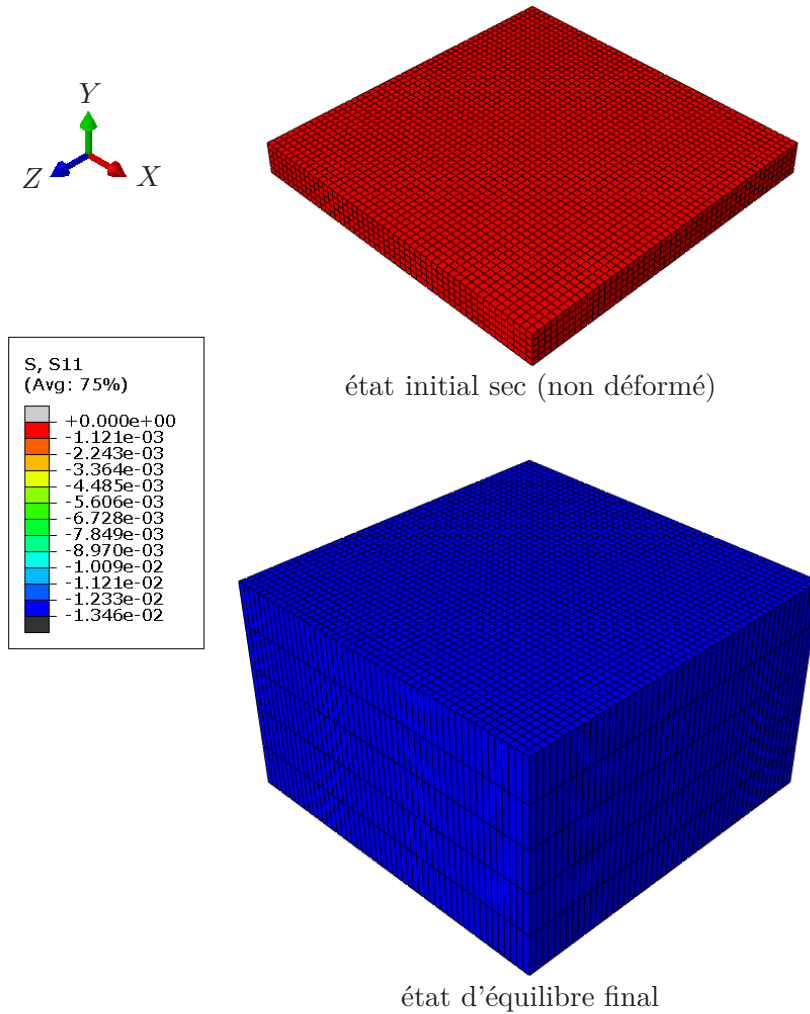


FIGURE 2.13 – Distribution spatiale de la contrainte  $\sigma_{11}$  normalisée par  $kT/\nu$  d'une couche d'échantillon en gonflement uniaxial obtenu par EF, avec  $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0, 1$  et  $\varepsilon = 2$ .

L'équilibre chimique est atteint lorsque le potentiel chimique vérifie  $\mu = \mu_0$ .

En remplaçant les expressions de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{P}$  dans l'équation (2.158), la contrainte et la pression hydrostatique s'écrivent respectivement :

$$P = -q + C_0 \lambda^{-\varepsilon/3}, \quad (2.186)$$

et

$$q = C_0 \lambda^{2-\varepsilon/3}. \quad (2.187)$$

Le potentiel chimique normalisé par  $kT/\nu$  est obtenu en substituant l'expression de  $q$  dans (2.160) :

$$\begin{aligned} \frac{\mu - \mu_0}{kT} = & \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} + \frac{\chi}{\lambda^2} \right] \\ & + \frac{1}{\gamma} \left[ \lambda^{-1/3} - \lambda^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) \lambda^{-1/3(1+\varepsilon)} + \lambda^{1-\varepsilon/3} \right]. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Cette expression permet de prédire l'élongation  $\lambda$  dans la direction normale au plan, en fonction du potentiel chimique. Enfin, l'**équation d'équilibre en gonflement uniaxial** vérifiée par  $\lambda^e$  (élongation à l'équilibre dans la direction normale) est donnée par :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda^e} \right) + \frac{1}{\lambda^e} + \frac{\chi}{(\lambda^e)^2} \right] + (\lambda^e)^{-1/3} - (\lambda^e)^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) (\lambda^e)^{-1/3(1+\varepsilon)} + (\lambda^e)^{1-\varepsilon/3} = 0. \quad (2.189)$$

En utilisant les équations (2.186) et (2.187), la contrainte équilibriaux à l'équilibre  $P^e$  s'écrit alors :

$$P^e = C_0 \left[ (\lambda^e)^{-\varepsilon/3} - (\lambda^e)^{2-\varepsilon/3} \right]. \quad (2.190)$$

#### ■ Influence des paramètres matériau sur le comportement :

La Figure 2.14 montre l'influence du paramètre  $\varepsilon$  sur le comportement en gonflement uniaxial. L'élongation  $\lambda$  et la contrainte  $P$  normalisée sont représentées en fonction de la variation de potentiel chimique  $(\mu - \mu_0)/(kT)$  que l'on fait tendre vers l'équilibre. On observe que l'augmentation de  $\varepsilon$  induit une augmentation importante du gonflement à l'équilibre ainsi qu'une importante diminution (en valeur absolue) de la contrainte à l'équilibre. Ceci est cohérent puisqu'on rappelle qu'une augmentation de  $\varepsilon$  correspond à un ramolissement du matériau.

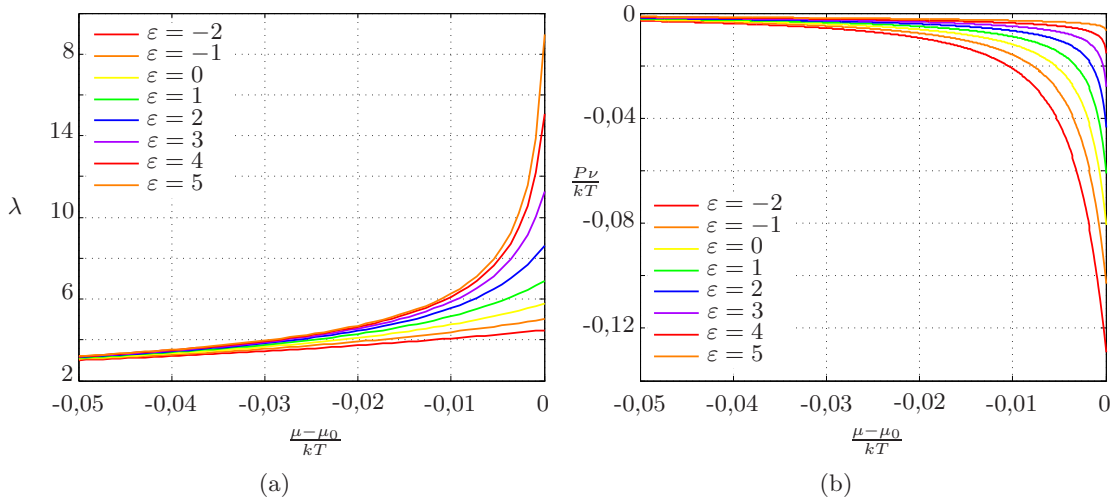


FIGURE 2.14 – Influence du paramètre  $\varepsilon$  sur le comportement en gonflement uniaxial. L'élongation (a) et la contrainte normalisée (b) sont représentées en fonction du potentiel chimique pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  (avec  $C_0 = 10^5$  Pa et  $\chi = 0, 1$  fixés). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

La Figure 2.15 montre l'influence du module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  (Figures 2.15a et 2.15b) et du coefficient d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$  (Figures 2.15c et 2.15d) sur l'équilibre en gonflement libre de contrainte. L'élongation  $\lambda^e$  et la contrainte  $P^e$  (normalisée) à l'équilibre sont représentées en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .

Comme précédemment, on remarque qu'une augmentation de  $\varepsilon$  induit une augmentation du gonflement à l'équilibre, d'autant plus importante que le matériau est mou ( $C_0$  faible)

et que son affinité avec le solvant est importante ( $\chi$  faible). En parallèle, on note une diminution (en valeur absolue) de la contrainte à l'équilibre.

Comme dans le cas du gonflement libre de contrainte, on constate que l'augmentation de la raideur du matériau sec (via une augmentation de  $C_0$ ) et l'augmentation du paramètre d'interaction  $\chi$  entraînent une diminution du gonflement (Figures 2.15a et 2.15c) :  $C_0$  et  $\chi$  faibles favorisent le gonflement. Parallèlement, l'augmentation de la raideur entraîne une augmentation (en valeur absolue) de la contrainte équi-biaxiale (Figures 2.15b et 2.15d). Ceci s'explique par le fait que, plus les chaînes du réseau sont raides, plus la contrainte sera importante à déformation équivalente. Au contraire, c'est une diminution du paramètre d'interaction qui induit une augmentation (en valeur absolue) de la contrainte (Figure 2.15d). En effet, plus  $\chi$  est faible, plus grande est l'affinité entre le solvant et le réseau, donc plus ce dernier gonfle. Les chaînes du réseau sont plus étirées, donc plus contraintes. On peut, en outre, remarquer que, lorsque  $\varepsilon$  est important,  $\chi$  n'a *a priori* plus d'effet notable sur la réponse en contrainte. En effet,  $\varepsilon$  correspond à un ramollissement, donc une perte de raideur, lors du gonflement. Or, il a été observé qu'une diminution de la raideur entraîne une diminution de la contrainte (d'après les Figure 2.15b et 2.15d). Par conséquent, lorsque  $\varepsilon$  est important, la différence de comportement pour les différentes valeurs de  $\chi$  subsiste certainement, mais les résultats sont écrasés par la chute de raideur, et donc de contrainte.

Si l'on compare la réponse obtenue en gonflement uniaxial avec la réponse obtenue en gonflement libre de contrainte (cf Figure 2.10a), on remarque que l'élongation obtenue dans le cas du gonflement uniaxial est plus importante que dans le cas du gonflement libre, car le matériau ne peut gonfler que dans une seule direction. Cependant, le gonflement est moindre dans le cas du gonflement uniaxial. En effet, pour  $C_0 = 10^5$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 0$  par exemple, l'élongation à l'équilibre en gonflement libre vaut  $\lambda_s^e = 2,85$ , soit un gonflement de  $J_s^e = (\lambda_s^e)^3 = 23,15$ , tandis qu'en gonflement uniaxial, l'élongation vaut  $\lambda^e = 5,77$ , soit un gonflement de  $J_s^e = \lambda^e = 5,77$ .

#### ■ Comparaison des résultats analytiques et EF :

La Figure 2.16 montre l'évolution de l'élongation dans la direction normale (Figure 2.16a) et de la contrainte normalisée (Figure 2.16b) lorsque l'on fait évoluer graduellement le potentiel chimique. Les résultats analytiques et les résultats obtenus par la Méthode des Eléments Finis pour  $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 0$  sont présentés. A nouveau, on constate une superposition des résultats analytique et EF, ce qui permet de confirmer la validation de l'implantation EF par la routine utilisateur UHYPER.

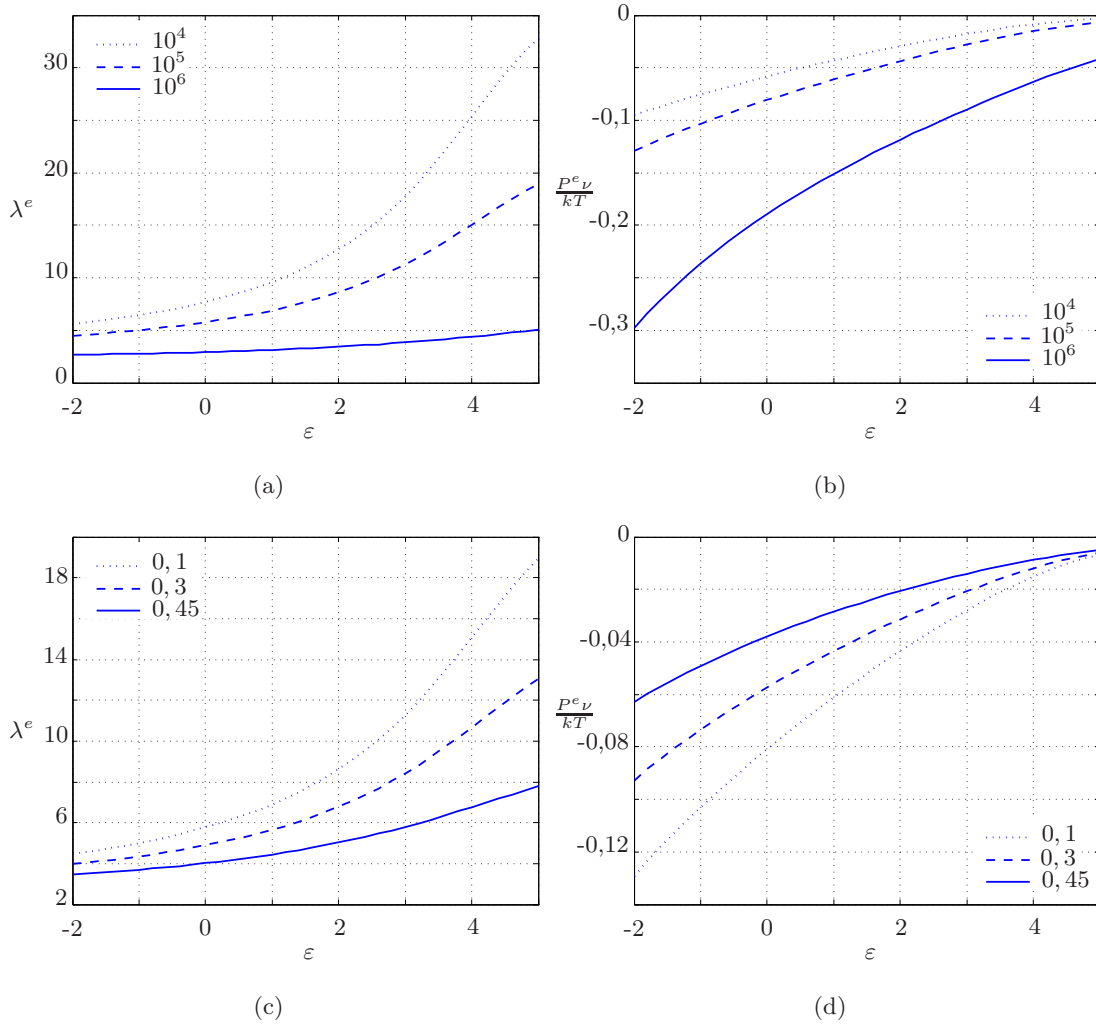


FIGURE 2.15 – Influence des paramètres matériau  $C_0$  et  $\chi$  sur le comportement en gonflement uniaxial : (a) et (b) influence du module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  (avec  $\chi = 0,1$  fixé) ; (c) et (d) influence du paramètre d'interaction  $\chi$  (avec  $C_0 = 10^5$  Pa fixé). L'élongation à l'équilibre  $\lambda^e$  (a) et (c), et la contrainte (normalisée) à l'équilibre  $P^e$  (c) et (d) sont représentées en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .

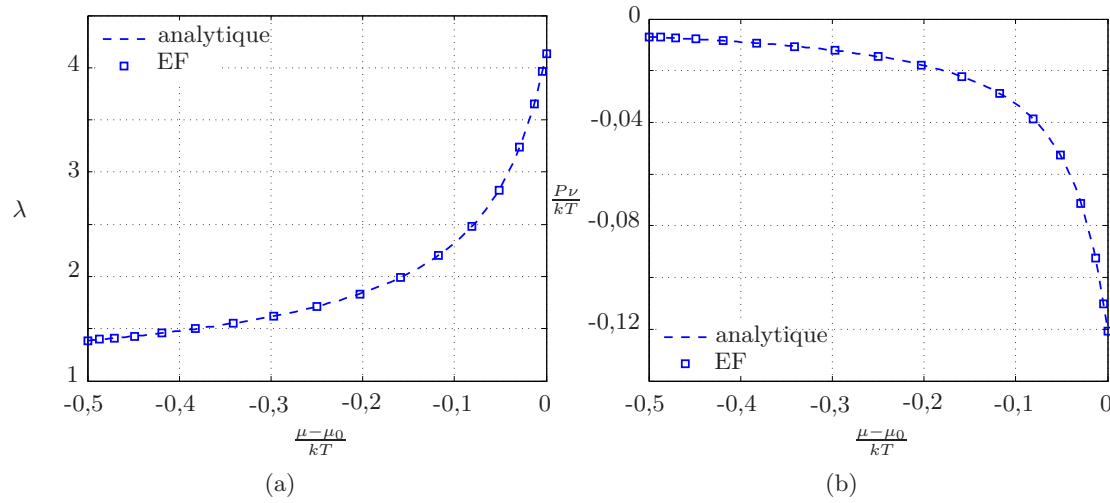


FIGURE 2.16 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de gonflement uniaxial. L'élongation (a) et la contrainte normalisée (b) sont représentées en fonction du potentiel chimique ( $C_0 = 3 \cdot 10^5$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 0$ ). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

### c. Traction/compression uniaxiale et gonflement combinés

#### ■ Description du problème :

Un échantillon cubique, supposé initialement sec est immergé dans un solvant de potentiel chimique constant  $\mu_0$ , à température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) et soumis simultanément à une contrainte uniaxiale (en traction ou compression) le long de sa direction longitudinale, comme le montre la Figure 2.17.

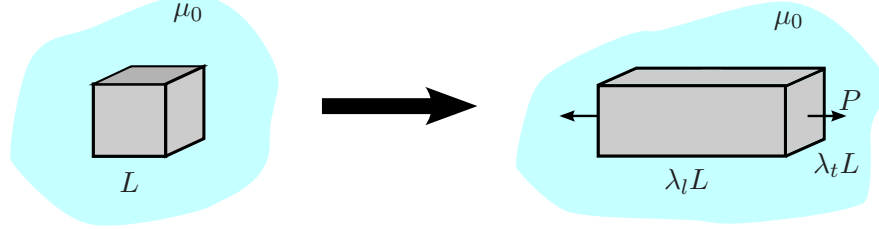


FIGURE 2.17 – Schéma illustrant l'exemple de traction/compression uniaxiale dans un excès de solvant.  $L$  : longueur du côté non déformée (état initial sec) ;  $\lambda_l L$  : longueur dans la direction longitudinale (état déformé) ( $\lambda_l$  représentant l'élongation longitudinale) ;  $P$  : contrainte (de Piola-Kirchhoff) longitudinale.

#### ■ Résolution EF :

Dans ABAQUS/CAE, un cube de côté 1 mm est réalisé. Le chargement est décomposé selon trois étapes successives : gonflement libre de contrainte, compression uniaxiale, traction uniaxiale. Si l'on note  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  le déplacement selon les directions  $X$ ,  $Y$ , et  $Z$  respectivement, et  $U_{R,1}$ ,  $U_{R,2}$  et  $U_{R,3}$  la rotation autour de  $X$ ,  $Y$ , et  $Z$  respectivement, alors les étapes de chargement sont caractérisées par les conditions aux limites suivantes :

1. Gonflement libre : au point de coordonnées  $(0,0,0)$ , on impose  $U_1 = U_2 = U_3 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$ .
2. Compression uniaxiale :
  - $X = 0$  :  $U_1 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $Y = 0$  :  $U_2 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $Z = 0$  :  $U_3 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $X = 1$  :  $U_1 = U_{d,comp}$  où la valeur de  $U_{d,comp}$  doit être choisie de sorte qu'elle soit inférieure au déplacement maximum atteint à la fin de l'étape de gonflement libre.
3. Traction uniaxiale :
  - $X = 0$  :  $U_1 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $Y = 0$  :  $U_2 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $Z = 0$  :  $U_3 = U_{R,1} = U_{R,2} = U_{R,3} = 0$
  - $X = 1$  :  $U_1 = U_{d,trac}$  où la valeur de  $U_{d,trac}$  doit être choisie de sorte qu'elle soit supérieure au déplacement maximum atteint à la fin de l'étape de gonflement libre.

La variation de potentiel chimique est imposée à l'aide de la fonction illustrée sur la Figure 2.7 dans l'étape 1, jusqu'à l'équilibre chimique, puis maintenue nulle dans les deux étapes suivantes. Le maillage est réalisé au moyen d'éléments de type C3D8H.



Les résultats EF pour cet exemple de gonflement combiné à de la traction/compression sont représentés sur la Figure 2.18, avec  $C_0 = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 5$ . Le déplacement maximum imposé en traction  $U_{d, \text{trac}}$  est de 4 mm (i.e.  $\lambda_l = 5$ ).

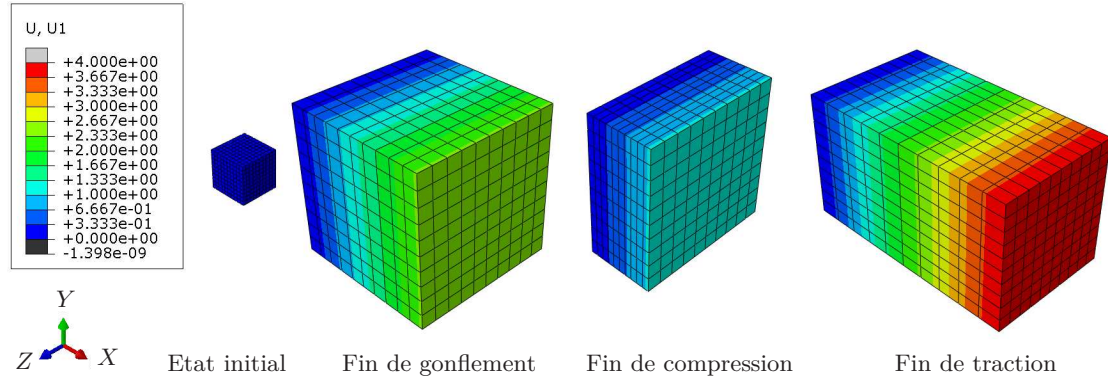


FIGURE 2.18 – Distribution spatiale du déplacement dans la direction  $X$  selon les différentes étapes dans le cas de l'exemple de gonflement suivi d'une traction/compression uniaxiale obtenu par EF, avec  $C_0 = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\varepsilon = 5$ .

### ■ Résolution analytique :

Notant  $\lambda_l$  l'élongation longitudinale dans la direction  $X$ , et  $\lambda_t$  l'élongation transverse dans les directions  $Y$  et  $Z$ , l'état de déformation est caractérisé par le gradient de transformation :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_l & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_t \end{bmatrix} \quad (J_s = \lambda_l \lambda_t^2), \quad (2.191)$$

et le tenseur des contraintes est donné par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.192)$$

L'équilibre chimique est atteint lorsque le potentiel chimique vérifie  $\mu = \mu_0$ .

En remplaçant les expressions de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{P}$  dans (2.135), la contrainte et la pression hydrostatique s'écrivent respectivement :

$$P = -q \lambda_l^{-1} + C_0 \lambda_l^{1-\varepsilon/3} \lambda_t^{-2\varepsilon/3}, \quad (2.193)$$

et

$$q = C_0 \lambda_l^{-\varepsilon/3} \lambda_t^{2(1-\varepsilon/3)}. \quad (2.194)$$

Substituant l'expression de  $q$  dans l'expression du potentiel chimique (2.152), on a :

$$\frac{\mu - \mu_0}{kT} = \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda_l \lambda_t^2} \right) + \frac{1}{\lambda_l \lambda_t^2} + \frac{\chi}{(\lambda_l \lambda_t^2)^2} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[ (\lambda_l \lambda_t^2)^{-1/3} - (\lambda_l \lambda_t^2)^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) (\lambda_l \lambda_t^2)^{1/3(1+\varepsilon)} + \lambda_l^{-(1+\varepsilon/3)} \lambda_t^{-2\varepsilon/3} \right]. \quad (2.195)$$

Enfin, l'équation d'équilibre en traction/compression uniaxiale et gonflement combinés vérifiée par  $\lambda_l^e$  et  $\lambda_t^e$  (élongations longitudinale et transverse à l'équilibre) est donnée par :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda_l^e (\lambda_t^e)^2} \right) + \frac{1}{\lambda_l^e (\lambda_t^e)^2} + \frac{\chi}{(\lambda_l^e (\lambda_t^e)^2)^2} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[ (\lambda_l \lambda_t^2)^{-1/3} - (\lambda_l^e (\lambda_t^e)^2)^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) (\lambda_l^e (\lambda_t^e)^2)^{1/3(1+\varepsilon)} + (\lambda_l^e)^{-(1+\varepsilon/3)} (\lambda_t^e)^{-2\varepsilon/3} \right] = 0. \quad (2.196)$$

En utilisant les expressions (2.193) et (2.194), la contrainte longitudinale à l'équilibre  $P^e$  s'écrit :

$$P^e = C_0 \left[ (\lambda_l^e)^{1-\varepsilon/3} (\lambda_t^e)^{-2\varepsilon/3} - (\lambda_l^e)^{-(1+\varepsilon/3)} (\lambda_t^e)^{2(1-\varepsilon/3)} \right]. \quad (2.197)$$

#### ■ Influence des paramètres matériau sur le comportement :

La Figure 2.19 montre l'influence du paramètre  $\varepsilon$  sur le comportement en traction/compression uniaxiale combinée au gonflement. En notant  $\lambda_s^e$  l'élongation en gonflement libre de contrainte (identique dans les trois directions de l'espace), l'élongation transverse à l'équilibre par rapport à l'état d'équilibre en gonflement libre de contrainte  $\lambda_t^e/\lambda_s^e$  est représentée en fonction de l'élongation longitudinale à l'équilibre par rapport à l'état d'équilibre en gonflement libre de contrainte  $\lambda_l^e/\lambda_s^e$ . De même, la contrainte longitudinale de Piola-Kirchhoff à l'équilibre  $P^e$  est représentée en fonction du rapport  $\lambda_l^e/\lambda_s^e$ .

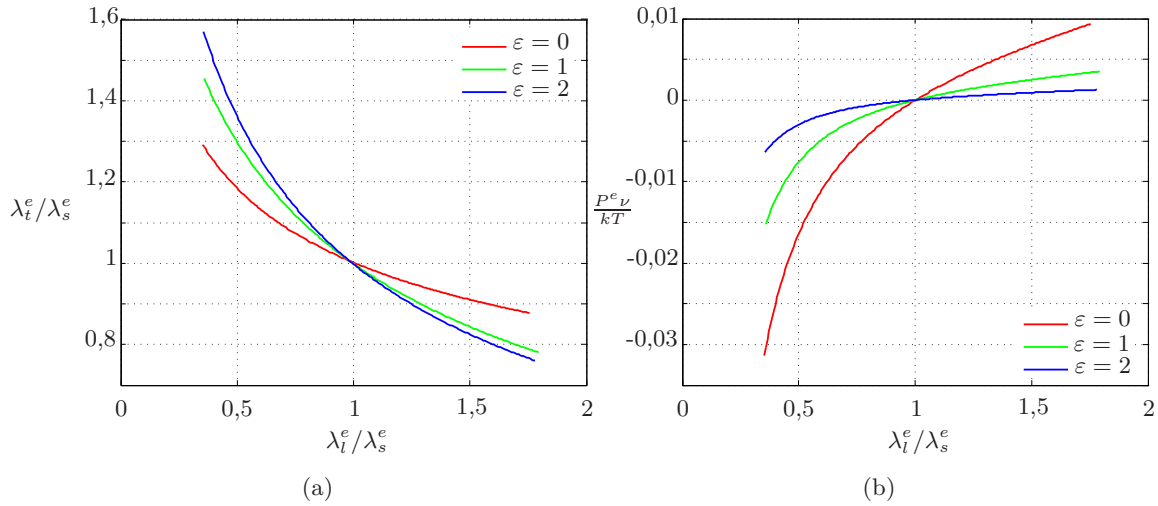


FIGURE 2.19 – Influence du paramètre  $\varepsilon$  sur le comportement en traction/compression uniaxiale : (a) élongation transverse à l'équilibre  $\lambda_t^e/\lambda_s^e$  en fonction de l'élongation longitudinale à l'équilibre  $\lambda_l^e/\lambda_s^e$ , (b) contrainte longitudinale (normalisée) à l'équilibre en fonction de l'élongation longitudinale par rapport à l'équilibre gonflé (avec  $C_0 = 10^5$  Pa et  $\chi = 0,1$  fixés).

La Figure 2.20 montre l'influence du module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  (Figures 2.20a et 2.20b) et du coefficient d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$  (Figures 2.20a et 2.20b) respectivement sur le comportement en traction/compression uniaxiale combinée au gonflement. L'élongation transverse à l'équilibre  $\lambda_t^e$  et la contrainte longitudinale de Piola-Kirchhoff à l'équilibre  $P^e$  (normalisée) sont représentées en fonction du paramètre  $\varepsilon$ , pour

une élongation longitudinale imposée  $\lambda_l^e = 5$ .

Globalement, une augmentation de  $\varepsilon$  entraîne une diminution de l'élongation transverse  $\lambda_t^e$ , à même élongation longitudinale imposée (c'est-à-dire une diminution du gonflement), quels que soient les paramètres matériau  $C_0$  et  $\chi$ . Lorsque  $\varepsilon > 2$ , il n'y a plus d'effet notable sur l'élongation transverse (autrement dit sur le gonflement). Parallèlement, une augmentation de  $\varepsilon$  entraîne une diminution de la contrainte longitudinale à l'équilibre, d'autant plus importante que le matériau est raide à l'état sec ( $C_0 = 10^6$  Pa).

A nouveau, d'après les Figures 2.20a et 2.20c, on observe qu'une augmentation de la raideur à l'état sec  $C_0$  et du paramètre d'interaction  $\chi$  réduisent le gonflement. En outre, une augmentation de la raideur et du paramètre d'interaction entraîne une augmentation de la contrainte longitudinale (Figures 2.20b et 2.20d).

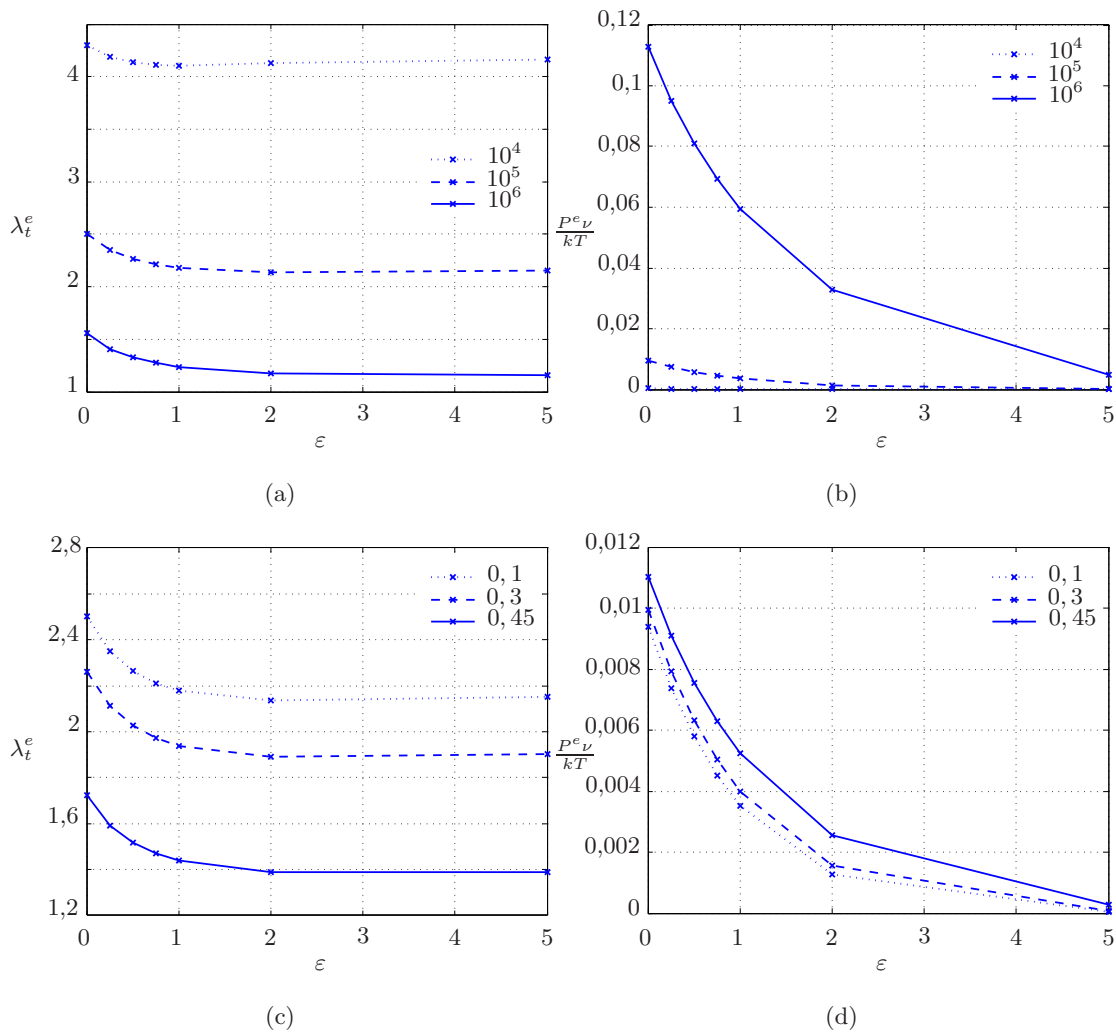


FIGURE 2.20 – Influence des paramètres matériau  $C_0$  et  $\chi$  sur le comportement en traction/compression uniaxiale : (a) et (b) influence du module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  (avec  $\chi = 0,1$  fixé) ; (c) et (d) influence du paramètre d'interaction  $\chi$  (avec  $C_0 = 10^5$  Pa fixé). L'élongation transverse à l'équilibre  $\lambda_t^e$  (a) et (c), et la contrainte normalisée à l'équilibre (c) et (d) sont représentées en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .

### ■ Comparaison des résultats analytiques et EF :

La Figure 2.21 compare les solutions analytiques et EF pour les deux modèles, pour  $C_0 = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0, 1$ . On rappelle que la résolution analytique permet de déterminer l'état d'équilibre après sollicitation uniaxiale dans un excès de solvant puis l'établissement du régime permanent (traction ou compression combinée à du gonflement). Autrement dit, la solution analytique résout les états d'équilibre successifs : à chaque  $\lambda_l$  imposé, on attend suffisamment longtemps pour que l'équilibre soit établi, et on détermine la déformation transverse et la contrainte longitudinale.

Sous ABAQUS, on a successivement imposé le gonflement jusqu'à l'équilibre puis la sollicitation uniaxiale, ce qui explique la présence des portions linéaires sur la Figure 2.21a, car le gonflement est isotrope, et sur la Figure 2.21b, car il est, en outre, libre de contrainte. La prédiction des états d'équilibres successifs en traction/compression correspond ensuite exactement à celle obtenue analytiquement. Ce troisième exemple valide définitivement l'implantation EF par la routine utilisateur UHYPER.

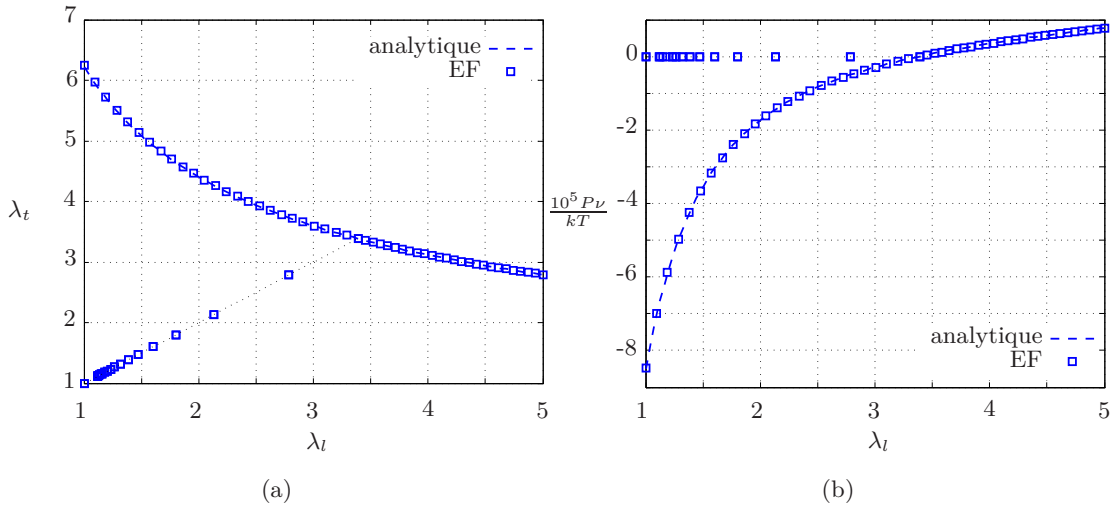


FIGURE 2.21 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de traction/compression uniaxiale : (a) élongation transverse en fonction de l'élongation longitudinale ; (b) contrainte longitudinale (Piola-Kirchhoff) normalisée en fonction de l'élongation longitudinale ( $C_0 = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0, 1$  et  $\varepsilon = 5$ ).

#### 2.3.4.2 Etats hors équilibre

Dans cet exemple, l'étude transitoire du gonflement uniaxial est effectuée. Seule la solution analytique est déterminée. En effet, l'implantation EF des états hors équilibre dépasse le cadre de cette étude. Néanmoins, la résolution analytique apporte des éléments de compréhension des équations et de leur couplage.

L'étude à l'équilibre du gonflement uniaxial a été effectuée précédemment : un échantillon, dont l'épaisseur  $H_0$  (dans la direction  $Y$ ) est faible par rapport aux deux dimensions du plan  $(X, Z)$ , est posé sur un substrat rigide, puis mis en contact avec un solvant de potentiel chimique  $\mu_0$ , à température ambiante ( $T = 20$  °C), et libre de gonfler en fonction du temps (cf Figure 2.12 pour rappel). Les effets de bord étant négligés du fait des

dimensions de l'échantillon, on considère que ce dernier est en contact avec le solvant en  $Y = H_0$  seulement.

La déformation de l'échantillon, à mesure que le solvant est absorbé, est donc décrite par des équations locales suivantes :

$$x = X, \quad y = \varphi(Y, t), \quad z = Z, \quad (2.198)$$

et, par définition, l'élongation normale au plan est donnée par :

$$\lambda = \lambda(Y, t) = \frac{\partial \varphi(Y, t)}{\partial Y}. \quad (2.199)$$

Ainsi, le gradient de transformation s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(Y, t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J_s(Y, t) = \lambda(Y, t). \quad (2.200)$$

On rappelle que le problème à résoudre est le suivant (en l'absence de forces volumiques) (cf équations (2.73) et (2.74)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \dot{c} &= -\mathbf{Div} \mathbf{J} \\ &+ \text{conditions aux limites appropriées,} \end{aligned} \quad (2.201)$$

avec  $\mathbf{J}$  donné par l'équation (2.138), et les équations constitutives (2.158) et (2.160), qui, dans le cas où  $\varepsilon = 0$ , sont équivalentes aux équations (2.135) et (2.137).

En introduisant l'expression de  $\mathbf{F}$  dans l'équation (2.158), on obtient :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \lambda^{\varepsilon/3} - q & 0 & 0 \\ 0 & C_0 \lambda^{1-\varepsilon/3} - q \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \lambda^{\varepsilon/3} - q \end{bmatrix}, \quad (2.202)$$

puis

$$\mathbf{0} = \mathbf{Div} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \partial P_{11} / \partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial P_{22} / \partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial P_{33} / \partial Z \end{bmatrix}. \quad (2.203)$$

La seconde équation issue de (2.202) et de (2.203) entraîne :

$$P_{22} = C_0 \lambda^{1-\varepsilon/3} - q \lambda^{-1} = \alpha, \quad (2.204)$$

où  $\alpha$  est une constante indépendante de  $Y$ , ceci devant être vérifié  $\forall Y$ . En particulier, l'équation (2.204) doit être vérifiée en  $Y = H_0$ , ce qui implique :

$$\forall Y, \quad P_{22} = C_0 \lambda^{1-\varepsilon/3} - q \lambda^{-1} = \alpha = P_{22}|_{Y=H_0} = 0, \quad (2.205)$$

et donc

$$q = C_0 \lambda^{2-\varepsilon/3}. \quad (2.206)$$

En introduisant l'équation (2.206) dans l'équation (2.160) et en utilisant le fait que  $\lambda = J_s$ , on exprime alors le potentiel chimique en fonction de  $J_s$  uniquement :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_0}{\nu} + kT \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_s} \right) + \frac{1}{J_s} + \frac{\chi}{J_s^2} \right] \\ + C_0 \left[ J_s^{-1/3} - J_s^{-1} + \left( \frac{\varepsilon}{3} - 1 \right) J_s^{-1/3(1+\varepsilon)} + J_s^{1-\varepsilon/3} \right]. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Par ailleurs, la dérivée temporelle de la relation d'incompressibilité moléculaire donnée par l'équation (2.80) s'écrit :

$$\dot{c} = \frac{\dot{J}_s}{\nu}. \quad (2.208)$$

L'équation de la diffusion (2.201)<sub>2</sub> initialement écrite en  $c$  peut donc s'écrire intégralement en fonction de la variable  $J_s$  selon :

$$\dot{J}_s = -\nu \text{Div} \mathbf{J}, \quad (2.209)$$

où  $\mathbf{J}$ , donné par (2.138), est fonction de  $\mathbf{Grad} \mu$  uniquement, qui peut être simplifié de la façon suivante (étant donné que le problème est unidirectionnel) :

$$\mathbf{Grad} \mu = \frac{\partial \mu}{\partial Y} \mathbf{Y} = \frac{\partial \mu}{\partial J_s} \frac{\partial J_s}{\partial Y} \mathbf{Y}, \quad (2.210)$$

avec  $\partial \mu / \partial J_s$  facilement calculable à partir de (2.207).

En outre, les conditions aux limites du problème sont les suivantes :

- en  $Y = 0$ , le déplacement est nul, i.e.  $y = Y$ , et le contact avec le substrat rigide est imperméable au flux de solvant, c'est-à-dire  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .
- en  $Y = H_0$ , le polymère est à l'équilibre avec le solvant ( $\mu = \mu_0$ ), et la surface est libre de contrainte, c'est-à-dire  $\mathbf{P} \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ .
- à  $t = 0$ , le polymère est initialement sec, i.e.  $J_s = 1$ .

La Figure 2.22 propose la résolution analytique de l'équation (2.209) avec les conditions aux limites ci-dessus, pour un échantillon d'épaisseur initiale  $H_0 = 0,01$  m libre de gonfler uniaxialement pendant 24 h. Les paramètres de la diffusion  $D = 5 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s et  $n = 1$  ont été choisis identiques à ceux de Chester et Anand (2010). Les paramètres matériau  $C_0 = 10^5$  Pa et  $\chi = 0,1$  ont été choisis identiques à ceux de l'étude à l'équilibre, afin de vérifier les résultats.

Les Figures 2.22a et 2.22c montrent l'évolution de l'élongation  $\lambda(Y, t)$  dans la direction normale au plan en fonction de l'épaisseur à différents instants, pour  $\varepsilon = 0$  (classique) et  $\varepsilon = 2$ . A  $t = 0$ , le corps est entièrement sec, donc  $\lambda = 1$ . Le gonflement se fait progressivement au contact avec le solvant en  $Y = H_0$ . Après 24 h, l'élongation normale vaut  $\lambda = 4,10$  lorsque  $\varepsilon = 0$  et  $\lambda = 4,30$  lorsque  $\varepsilon = 2$ . A l'équilibre (qui n'est pas atteint en 24 h mais néanmoins représenté par la ligne en pointillés), on obtient  $\lambda^e = 5,79$  lorsque  $\varepsilon = 0$  et  $\lambda^e = 8,66$  lorsque  $\varepsilon = 2$ , ce qui correspond bien à ce qui avait été déterminé précédemment (cf Figure 2.14a). En outre, on observe à nouveau qu'un gonflement plus important est prévu lorsque  $\varepsilon$  est plus important, comme cela a déjà été remarqué auparavant.

Les Figures 2.22b et 2.22d montrent l'évolution de la fraction volumique de polymère  $\phi = 1/J_s$  en fonction de l'épaisseur, à différents instants, pour  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = 2$  respectivement.

Initialement, le corps entier est composé à 100 % de polymère. Après 24 h, la partie supérieure ( $Y = H_0$ ) est composée de seulement 17,3 % de polymère et 82,7 % de fluide pour le modèle classique tandis que la partie inférieure ( $Y = 0$ ) est composée de 24,4 % de polymère et 75,6 % de fluide lorsque  $\varepsilon = 0$ . Lorsque  $\varepsilon = 2$ , le corps est composé de 11,5 % de polymère et 88,5 % de fluide dans sa partie supérieure et de 23,3 % de polymère et 76,7 % de fluide dans sa partie inférieure).

Le code Matlab utilisé pour effectuer résoudre le problème de gonflement uniaxial transitoire est disponible en Annexe B.

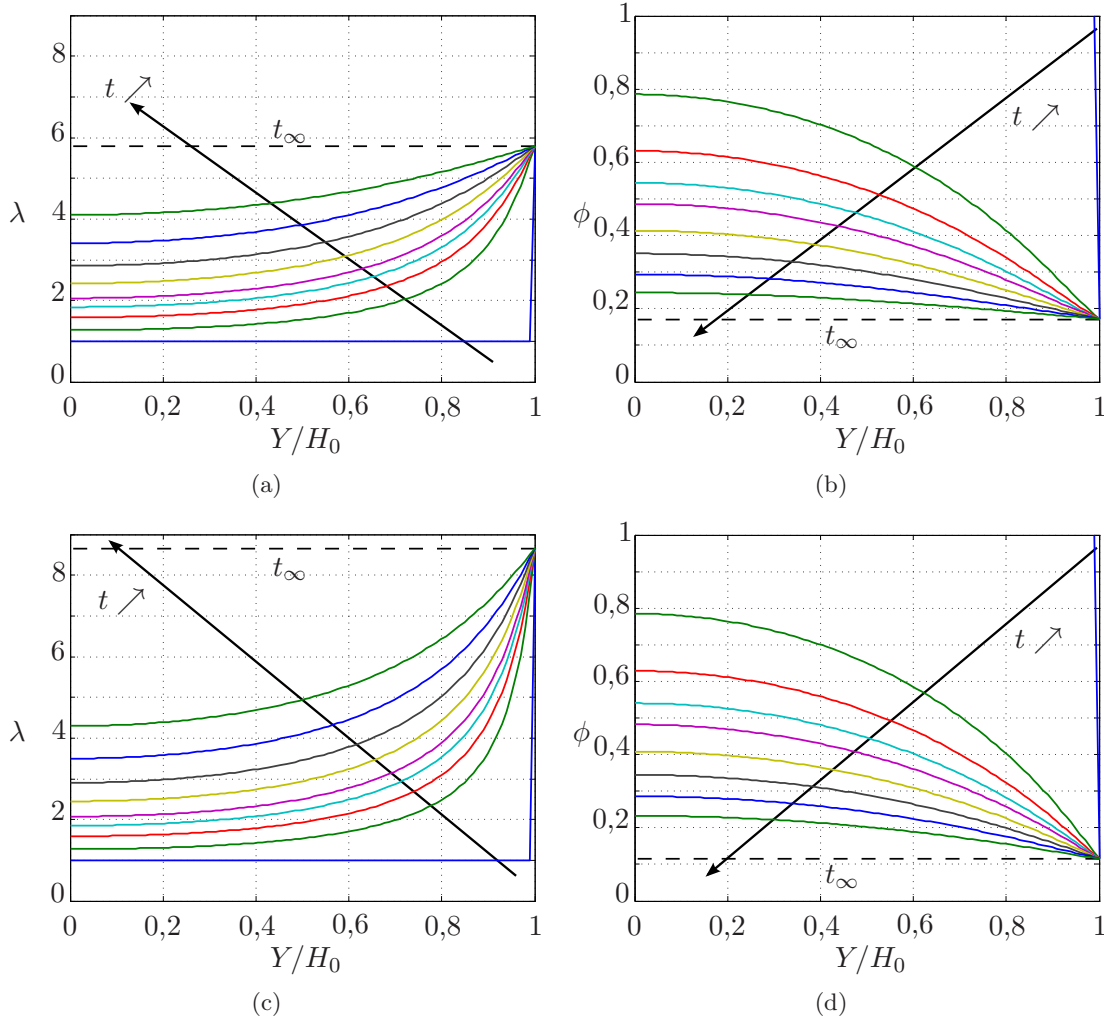


FIGURE 2.22 – Résolution analytique du problème de gonflement uniaxial transitoire, avec  $C_0 = 10^5$  Pa et  $\chi = 0, 1$ , pour  $\varepsilon = 0$  (a) et (b), et  $\varepsilon = 2$  (c) et (d). L'élongation normale au plan (a) et (c), et la fraction volumique de polymère (b) et (d) sont représentées en fonction de l'épaisseur normalisée.

### 2.3.5 Bilan

Dans cette section, un nouveau modèle couplant grandes déformations et diffusion pour les matériaux de type « gels » a été proposé. Ce modèle présente la particularité

de prendre en compte l'**évolution de la raideur en fonction du gonflement**. Les aspects théoriques de ce nouveau modèle (description rigoureuse du cadre cinématique et du cadre thermodynamique pour le bon déroulement de la théorie constitutive) ont été développés, conjointement aux aspects théoriques du modèle dit « classique » (où les paramètres matériau ne sont pas influencés par le gonflement). Il a en outre été montré que, sous certaines hypothèses, le modèle classique peut être vu comme un cas particulier de ce nouveau modèle, qu'on a choisi d'appeler « modèle généralisé ».

La mise en œuvre numérique pour la résolution des états d'équilibre par la Méthode des Éléments Finis dans le code de calcul ABAQUS au moyen de la routine utilisateur a ensuite été décrite.

Enfin, des exemples d'application simples dont la solution analytique est connue ont été étudiés. Ces cas test ont, d'une part, permis de valider l'implantation des lois de comportement dans ABAQUS. D'autre part, ils ont permis de préciser l'influence des paramètres matériau (module de cisaillement à l'état sec  $C_0$  et coefficient d'interaction de Flory-Huggins  $\chi$ ) et du paramètre  $\varepsilon$  caractérisant l'écart avec la théorie classique sur le comportement : on retiendra notamment que  $C_0$  **faible** et  $\chi$  **faible favorisent le gonflement**. La résolution analytique d'un problème hors équilibre a également été proposée à des fins d'illustration.

Les capacités étendues du modèle généralisé ont été détaillées sur un cas très simple déviant très légèrement dans sa forme de la formulation classique, avec l'incorporation du paramètre  $\varepsilon$ . Néanmoins, ce modèle est en mesure de retranscrire des effets observés expérimentalement tel qu'un raidissement additionnel à certains états de gonflement. Ce modèle est donc capable de décrire des situations physiques plus complexes que l'on pourra rencontrer dans les hydrogels de synthèse.

Dans la section suivante, un autre aspect original par rapport au modèle classique est développé : il s'agit de la prise en compte d'une configuration déjà gonflée comme référence.

## 2.4 Prise en compte d'une configuration de référence préablement gonflée

### 2.4.1 Motivation

Comme cela a été évoqué au cours de la section 2.1, la définition de l'état de référence est un point critique pour le développement des modèles. Selon Vervoort (2006), l'état de référence est défini comme l'état dans lequel les points de réticulation ne sont soumis à aucun effort, i.e. le matériau figure dans un état libre de contrainte. Le choix de Flory (1953) de considérer l'état sec comme état de référence, est peu discutable pour l'étude des élastomères gonflés (vu la faible teneur en fluide au cours du processus). Or, généralement, les gels sont préparés en solution. Autrement dit, ces derniers contiennent initialement une certaine proportion de solvant, nécessaire à leur formation, et on peut raisonnablement penser que c'est cet état, dit « état de préparation », qui vérifie la définition de Vervoort (2006). Récemment, plusieurs auteurs, parmi lesquels on peut citer Lucantonio *et al.* (2013) ou Drozdov et Christiansen (2013b, c), ont étudié le gonflement de gels à partir d'un état de référence qui diffère de l'état sec. En outre, en gardant à l'esprit l'objectif d'appliquer les modèles développés au cas du NP, ceci est cohérent dans la mesure où, pour le NP,



l'état sec n'a pas de sens et que le phénomène de dégénérescence peut être vu comme une dégradation d'une configuration de référence.

Dans cette section, on considère un **état de référence qui diffère de l'état sec et qui est préalablement gonflé**.

## 2.4.2 Dérivation du modèle

### 2.4.2.1 Cinématique

Comme dans la section 2.3.2.1, on se place dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus où  $\mathbf{X}$  désigne la coordonnée d'un point matériel P dans la configuration de référence et  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X})$  dans la configuration déformée, avec  $\boldsymbol{\varphi}^*$  la transformation de la configuration de référence. Le gradient de la déformation est défini par  $\mathbf{F}^* = \mathbf{Grad}\boldsymbol{\varphi}^*$ . Les hypothèses de travail, identiques à celles de la section 2.3.2.1 sont rappelées : le mélange fluide/solide est traité comme un milieu continu, homogène et isotrope, le réseau polymère et le fluide sont supposés intrinsèquement incompressibles.

Cependant, en suivant l'hypothèse de Dušek et Prins (1969) selon laquelle, pour un gel, l'état de référence correspond à l'état du réseau dans les conditions de préparation, on choisit un état initial de référence qui diffère de l'état sec et qui est initialement déjà gonflé (*a priori* pas jusqu'à l'équilibre). Autrement dit, **on choisit de prendre comme état de référence un état préalablement gonflé**.

On utilise à nouveau une décomposition multiplicative du gradient de la déformation de la forme :

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{f}\mathbf{F}_s^*, \quad (2.211)$$

où

- $\mathbf{F}_s^*$  représente le gradient de la déformation associé au gonflement dû à l'absorption des molécules de fluide par le réseau de polymère **à partir de la configuration de référence préalablement gonflée**. Le gonflement étant supposé isotrope, notant  $J_s^* = \det \mathbf{F}_s^*$ , on peut alors écrire

$$\mathbf{F}_s^* = J_s^{*1/3} \mathbf{I}; \quad (2.212)$$

- $\mathbf{f}$  représente le gradient de la déformation purement mécanique, qui est iso-volume ( $\det \mathbf{f} = 1$ ).

On a alors

$$\det \mathbf{F}^* = \det \mathbf{f} \det \mathbf{F}_s^* = J_s^*. \quad (2.213)$$

La Figure 2.23 représente schématiquement cette décomposition multiplicative sur un volume élémentaire représentatif.

On rappelle que  $V_p$  désigne le volume du réseau polymère et  $V_f$  désigne le volume (total) de fluide absorbé par le réseau. On note en outre  $V_0^*$  le volume du gel dans l'état de référence préalablement gonflé,  $V_{f,0}$  le volume de fluide présent dans le réseau initialement, et  $V_{f,a}$  le volume de fluide additionnel absorbé par le réseau entre l'état de référence et l'état courant. On a alors :

$$V_0^* = V_p + V_{f,0} \quad \text{et} \quad V = V_0^* + V_{f,a} = V_p + V_{f,0} + V_{f,a}. \quad (2.214)$$

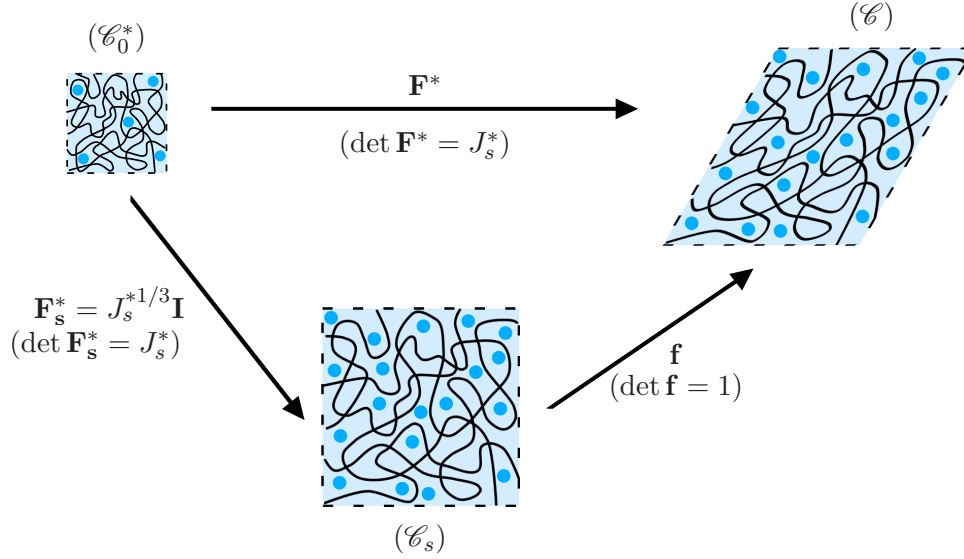


FIGURE 2.23 – Schéma représentatif de la décomposition multiplicative du gradient de la déformation  $\mathbf{F}^* = \mathbf{f}\mathbf{F}_s^*$  (dans le cas où l'état de référence est un état préalablement gonflé) sur un volume représentatif élémentaire, avec  $(\mathcal{C}_0^*)$  la configuration de référence (préalablement gonflée),  $(\mathcal{C})$  la configuration courante (gonflée et déformée), et  $(\mathcal{C}_s)$  la configuration intermédiaire (gonflée).

Ainsi, le changement de volume entre la configuration de référence et la configuration courante vaut :

$$J_s^* = \frac{V}{V_0^*} = 1 + \frac{V_{f,a}}{V_0^*}. \quad (2.215)$$

En introduisant  $\nu$  le volume d'une molécule de fluide et  $n_{f,a}$  le nombre de molécules de fluide additionnelles absorbées par le réseau (entre la configuration de référence et la configuration courante), la relation d'incompressibilité moléculaire tenant compte de l'état de référence préalablement gonflé s'écrit :

$$J_s^* = 1 + \frac{n_{f,a}\nu}{V_0^*} = 1 + \nu c^*, \quad (2.216)$$

où

$$c^* = \frac{n_{f,a}}{V_0^*} \quad (2.217)$$

désigne le nombre de molécules de fluide absorbées par le réseau (entre la configuration de référence et la configuration courante) par unité de volume de référence  $V_0^*$ .

#### 2.4.2.2 Théorie constitutive et spécialisation de la théorie

Avec les nouvelles notations et définitions introduites dans la section 2.4.2.1, l'expression de la densité de dissipation interne par unité de volume de référence (2.71) devient :

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}^* + \mu \dot{c}^* - \dot{\Psi}^* - \mathbf{J} \cdot \mathbf{Grad} \mu \geq 0, \quad (2.218)$$

où l'on note  $\Psi^*$  la densité d'énergie libre associée à la déformation totale par unité de volume de référence  $V_0^*$ . Ainsi, en suivant le même raisonnement que dans la section 2.3.2.2 en utilisant les variable  $J_s^*$  et  $\mathbf{f}$  comme variables de travail, on cherchera  $\Psi^*$  de la forme

$$\Psi^* = \tilde{\Psi}^*(\mathbf{f}, J_s^*), \quad (2.219)$$

les équations constitutives (tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  ou de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  et potentiel chimique  $\mu$ ) ainsi que le flux de molécules  $\mathbf{J}$  de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{f}, J_s^*), & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f}, J_s^*) \\ \mu = \mu(\mathbf{f}, J_s^*), \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{f}, J_s^*, \mathbf{Grad}\mu) \end{cases} \quad (2.220)$$

Le développement de la théorie constitutive se poursuit de façon analogue à celui de la section 2.3.2.2 et conduit aux équations constitutives suivantes :

– Contrainte :

$$\text{Piola-Kirchhoff :} \quad \mathbf{P}(\mathbf{f}, J_s^*) = -qJ_s^{*-1/3}\mathbf{f}^{-T} + J_s^{*-1/3} \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s^*} \quad (2.221)$$

$$\text{Cauchy :} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{f}, J_s^*) = -qJ_s^{*-1}\mathbf{I} + J_s^{*-1} \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{f}^T \quad (2.222)$$

– Potentiel chimique :

$$\frac{\mu(\mathbf{f}, J_s^*)}{\nu} = \left. \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial J_s^*} \right|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.223)$$

– Flux de solvant :

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}, J_s^*) = -\tilde{m}(i_1, i_2, J_s^*) \mathbf{Grad}\mu. \quad (2.224)$$

Pour le flux de solvant, on suit à nouveau les hypothèses de [Chester et Anand \(2010\)](#) : la formulation proposée est donc similaire à celle des équations (2.134) et (2.155) :

$$\mathbf{J} = -\frac{D}{\nu kT} (J_s^* - 1)^n \mathbf{Grad}\mu \quad (2.225)$$

Comme précédemment, on considère que la densité d'énergie libre  $\tilde{\Psi}^*$  peut être décomposée selon trois contributions : la contribution du solvant pur, la contribution due au mélange solvant-polymère, la contribution mécanique. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\tilde{\Psi}^*(\mathbf{f}, J_s^*) = \tilde{\Psi}_{\text{pur}}^*(J_s^*) + \tilde{\Psi}_{\text{mix}}^*(J_s^*) + \tilde{\Psi}_{\text{méca}}^*(\mathbf{f}, J_s^*). \quad (2.226)$$

Comme dans l'équation (2.118), la contribution du solvant pur s'écrit à l'origine simplement en fonction de  $c^*$  de la façon suivante :

$$\hat{\Psi}'_{\text{pur}}(c^*) = \mu_0 c^*, \quad (2.227)$$

où  $\mu_0$  désigne le potentiel chimique du solvant pur. En utilisant la relation d'incompressibilité moléculaire modifiée donnée par l'équation (2.216), la **densité d'énergie libre associée au solvant pur, exprimé par unité de volume de référence  $V_0^*$**  devient :

$$\tilde{\Psi}_{\text{pur}}^*(J_s^*) = \frac{\mu_0}{\nu} (J_s^* - 1). \quad (2.228)$$

Par ailleurs, l'énergie totale associée à un mélange solvant-polymère peut être décrite par la formulation de Flory-Huggins donnée par l'équation (2.13). Cette quantité, exprimée en fonction de la fraction volumique de polymère dans le mélange  $\phi = V_p/V$ , est rappelée ici :

$$\Delta F_{\text{mix}} = \frac{kT}{\nu} \frac{V_p}{\phi} [(1 - \phi) \ln(1 - \phi) + \chi \phi (1 - \phi)]. \quad (2.229)$$

Notons  $\phi_0$  la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé, définie par :

$$\phi_0 = \frac{V_p}{V_0^*}. \quad (2.230)$$

Par suite, on note également  $J_{s,0} = 1/\phi_0$ . Grâce à la définition de  $J_s^*$  donnée par l'équation (2.215), on obtient une relation entre  $\phi$  et  $J_s^*$  :

$$\phi = \frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_0^*} \frac{V_0^*}{V} = \frac{1}{J_{s,0} J_s^*}. \quad (2.231)$$

En substituant (2.231) dans l'équation (2.229), on obtient, pour l'énergie libre totale du mélange :

$$\Delta F_{\text{mix}} = \frac{kT}{\nu} V_p (J_{s,0} J_s^* - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{\chi}{J_{s,0} J_s^*} \right]. \quad (2.232)$$

Et la **densité d'énergie libre de mélange solvant-polymère par unité de volume de référence**  $V_0^*$  est :

$$\Psi_{\text{mix}}^* = \frac{\Delta F_{\text{mix}}}{V_0^*} = \frac{kT}{\nu} \frac{1}{J_{s,0}} (J_{s,0} J_s^* - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{\chi}{J_{s,0} J_s^*} \right]. \quad (2.233)$$

Enfin, on rappelle que l'énergie mécanique totale mise en jeu dans la déformation d'un réseau gonflé à partir de son état de référence sec s'écrit (cf équation (2.50)) :

$$\Delta F_{\text{méca}} = V_0 \frac{C_0}{2} (I_1 - 3 - 2 \ln J_s), \quad (2.234)$$

où  $C_0$  désigne le module de cisaillement du réseau sec. Par analogie, l'énergie mécanique totale mise en jeu dans la déformation à partir d'un état de référence préalablement gonflé est obtenue en effectuant les transformation  $V_0 \leftarrow V_0^*$ ,  $C_0 \leftarrow C_0^*$ ,  $I_1 = \text{tr} \mathbf{F} \leftarrow I_1^* = \text{tr} \mathbf{F}^*$ , ce qui donne :

$$\Delta F_{\text{méca}}^* = V_0^* \frac{C_0^*}{2} (I_1^* - 3 - 2 \ln J_s^*), \quad (2.235)$$

où  $C_0^*$  **désigne le module de cisaillement du réseau dans l'état de référence préalablement gonflé**.

Finalement, la **densité d'énergie de déformation mise en jeu lors de la déformation d'un réseau à partir d'un état de référence préalablement gonflé par unité de volume de référence**  $V_0^*$  est donnée par :

$$\Psi_{\text{méca}}^* = \frac{\Delta F_{\text{méca}}'}{V_0^*} = \frac{C_0^*}{2} (I_1^* - 3 - 2 \ln J_s^*). \quad (2.236)$$

Ainsi, l'expression de la contrainte (2.222) devient :

$$\text{Piola-Kirchhoff :} \quad \mathbf{P} = -q J_s^{*-1/3} \mathbf{f}^{-T} + J_s^{*-1/3} \frac{\partial \Psi_{\text{méca}}^*}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{J_s^*} \quad (2.237)$$

$$\text{Cauchy :} \quad \boldsymbol{\sigma} = -q J_s^{*-1} \mathbf{I} + J_s^{*-1} \frac{\partial \Psi_{\text{méca}}^*}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{f}^T, \quad (2.238)$$

et le potentiel chimique s'écrit :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{d\Psi_{\text{pur}}^*}{dJ_s^*} + \frac{d\Psi_{\text{mix}}}{dJ_s^*} + \frac{\partial \Psi_{\text{méca}}^*}{\partial J_s^*} \Big|_{\mathbf{f}} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.239)$$

où les différentes dérivées impliquées sont données par :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \Psi_{\text{méca}}^*}{\partial \mathbf{f}} \right|_{J_s^*} &= C_0^* J_s^{*2/3} \mathbf{f}, \\
 \frac{d\Psi_{\text{pur}}^*}{dJ_s^*} &= \frac{\mu_0}{\nu}, \\
 \frac{d\Psi_{\text{mix}}}{dJ_s^*} &= \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} + \frac{\chi}{(J_{s,0} J_s^*)^2} \right], \\
 \left. \frac{\partial \Psi_{\text{méca}}^*}{\partial J_s^*} \right|_{\mathbf{f}} &= C_0^* \left( \frac{1}{3} J_s^{*-1/3} i_1 - J_s^{*-1} \right).
 \end{aligned} \tag{2.240}$$

En introduisant (2.240)<sub>1</sub> dans (2.238)<sub>1</sub>, on obtient l'expression de la contrainte pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= -q \mathbf{F}^{*-T} + C_0^* \mathbf{F}^* \\
 \boldsymbol{\sigma} &= -q J_s^{*-1} \mathbf{I} + C_0^* J_s^{-1} \mathbf{B}^*,
 \end{aligned} \tag{2.241}$$

où  $\mathbf{B}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{F}^{*T}$  est le tenseur de Cauchy-Green gauche associé à la déformation  $\mathbf{F}^*$ . En introduisant (2.240)<sub>2</sub>, (2.240)<sub>3</sub> et (2.240)<sub>4</sub> dans (2.238) et en calculant  $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}$  à l'aide de (2.241), on obtient l'expression du potentiel chimique pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} + \frac{\chi}{(J_{s,0} J_s^*)^2} \right] + J_s^{*-1} (q - C_0^*). \tag{2.242}$$

#### Bilan :

Les équations constitutives du problème couplé mécanique/diffusion basé sur un état de référence préalablement gonflé sont finalement :

##### ■ Contrainte :

– Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{P} = -q \mathbf{F}^{*-T} + C_0^* \mathbf{F}^* \tag{2.243}$$

– Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = -q J_s^{*-1} \mathbf{I} + C_0^* J_s^{*-1} \mathbf{B}^* \tag{2.244}$$

##### ■ Potentiel chimique :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu_0}{\nu} + \frac{kT}{\nu} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} + \frac{\chi}{(J_{s,0} J_s^*)^2} \right] + J_s^{*-1} (q - C_0^*) \tag{2.245}$$

##### ■ Flux de solvant :

$$\mathbf{J} = -\frac{D}{\nu kT} (J_s^* - 1)^n \mathbf{Grad} \mu \tag{2.246}$$

**Remarque - Combinaison des deux aspects développés précédemment.** La combinaison des deux aspects développés précédemment (prise en compte d'une raideur qui évolue en fonction du gonflement avec un état de référence préalablement gonflé) n'est pas présentée ici, mais elle peut se faire très facilement. Il s'agit d'écrire l'énergie de déformation sous la forme :

$$\tilde{\Psi}_{\text{méca}}^*(\mathbf{f}, J_s^*) = \Psi_{J_s^*}^{0*}(J_s^*) + J_s^* w_{J_s^*}^*(\mathbf{f}),$$

où

$$\begin{aligned}\Psi_{J_s^*}^{0*}(J_s^*) &= \frac{C_1^*(J_s^*)}{2} (I_{1,s}^* - 3 - 2 \ln J_s^*) = \frac{C_1^*(J_s^*)}{2} (3J_s^{*2/3} - 3 - 2 \ln J_s^*), \\ w_{J_s^*}^*(\mathbf{f}) &= \frac{C_2^*(J_s^*)}{2} (i_1 - 3 - 2 \ln j) = \frac{C_2^*(J_s^*)}{2} (i_1 - 3),\end{aligned}$$

avec, en pratique,

$$\begin{aligned}C_1^*(J_s^*) &= C_0^* \\ C_2^*(J_s^*) &= C_0^* J_s^{*-1/3(1+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

### 2.4.2.3 Adaptations numériques

La méthodologie employée pour implanter dans ABAQUS le modèle basé sur une référence préalablement gonflée est rigoureusement identique à celle détaillée dans la section 2.3.3.2 :

1. transformation de Legendre,
2. décalage de l'état initial,
3. utilisation des invariants réduits,
4. adimensionnalisation ;

le but étant de réécrire la densité d'énergie libre, donnée par l'équation (2.226) dans laquelle on aura substitué les équations (2.228), (2.233) et (2.236) pour que le gonflement soit piloté par la variable  $\mu$ , pour qu'elle soit compatible avec les conditions requises par la routine utilisateur UHYPER, et enfin pour qu'elle permette d'éviter les problèmes numériques (notamment lorsque  $J_{s,0} = 1$ ).

L'énergie à implanter est finalement la suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{\mathcal{L},\text{adim}}^*(\mathbf{F}^{*'}, \mu) &= \frac{1}{J_{s,0}} \left( J_{s,0} J_s^{*'} - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^{*'} \det \mathbf{F}_0} \right) + \frac{\chi}{J_{s,0} J_s^{*'} \det \mathbf{F}_0} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma \det \mathbf{F}_0} \left( \lambda_0^2 J_s^{*'}{}^{2/3} \bar{I}_1^{*'} - 3 - 2 \ln (J_s^{*'} \det \mathbf{F}_0) \right) \\ &\quad - \frac{\mu - \mu_0}{kT} \left( J_s^{*'} - \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \right),\end{aligned}\tag{2.247}$$

où le décalage de l'état initial est réalisé au moyen de  $\mathbf{F}^{*'}$ , tel que  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{*'} \mathbf{F}_0$ , et où  $J_s^{*'} = \det \mathbf{F}^{*'}$  et  $I_1^{*'} = \text{tr}(\mathbf{F}^{*'})$ .

L'implémentation de l'expression (2.247), dont le code est fourni en Annexe C, nécessite la donnée de trois paramètres matériau à renseigner par l'utilisateur :

- le module de cisaillement dans l'état de référence préalablement gonflé  $C_0^*$ ,
- le paramètre d'interaction polymère-solvant de Flory-Huggins  $\chi$ ,
- le paramètre  $J_{s,0}$  qui caractérise la composition de l'état de référence (en pratique, on utilisera plutôt le paramètre  $\phi_0 = 1/J_{s,0}$  qui désigne la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé).

### 2.4.3 Quelques applications

Les mêmes exemples que dans la section 2.3.4 sont étudiés (détermination des états d'équilibre en gonflement libre, gonflement uniaxial, et traction/compression uniaxiale et gonflement combinés) afin de :

- valider l'implantation de la routine utilisateur UHYPER pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé grâce à la connaissance des solutions analytiques,
- étudier l'influence de l'état de référence, par le biais du paramètre  $\phi_0$  désignant la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé.

#### a. Gonflement libre de contrainte

Le gonflement libre de contrainte est décrit par le gradient de déformation  $\mathbf{F}^* = \lambda_s^* \mathbf{I}$  (où  $\lambda_s^* = J_s^{*1/3}$  désigne l'élongation) et le tenseur des contraintes  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ . On rappelle que l'équilibre est déterminé par la relation  $\mu = \mu_0$ .

Le même raisonnement que celui qui mène de l'équation (2.178) à l'équation (2.183) permet d'écrire la relation qui prédit l'élongation  $\lambda_s^*$  en fonction du potentiel chimique :

$$\frac{\mu - \mu_0}{kT} = \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{(\lambda_s^*)^3} \right) + \frac{\phi_0}{(\lambda_s^*)^3} + \frac{\chi \phi_0^2}{(\lambda_s^*)^6} \right] + \frac{1}{\gamma} [(\lambda_s^*)^{-1} - (\lambda_s^*)^{-3}], \quad (2.248)$$

et l'équation traduisant l'équilibre en gonflement libre de contrainte pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé vérifiée par  $\lambda_s^{*e}$  :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{(\lambda_s^{*e})^3} \right) + \frac{\phi_0}{(\lambda_s^{*e})^3} + \frac{\chi \phi_0^2}{(\lambda_s^{*e})^6} \right] + (\lambda_s^{*e})^{-1} - (\lambda_s^{*e})^{-3} = 0. \quad (2.249)$$

La Figure 2.24 montre l'évolution de l'élongation  $\lambda_s^*$  en fonction de la variation du potentiel chimique (jusqu'à atteindre l'équilibre) pour différentes fractions volumiques de polymère ( $\phi_0 = 10, 20, 30$  %) dans l'état de référence. On observe qu'une augmentation de  $\phi_0$  entraîne une augmentation de l'élongation, et donc une augmentation du gonflement. En introduisant

$$\phi_{f,0} = 1 - \phi_0 \quad (2.250)$$

la fraction volumique de solvant dans l'état de référence, ceci équivaut à dire qu'une diminution de la fraction volumique de solvant dans l'état de référence favorise le gonflement. En effet, plus l'état initial contient de solvant au départ, moins le réseau va être en mesure d'en absorber par la suite.

Enfin, la Figure 2.25 compare les résultats EF aux résultats analytiques, pour  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$  et  $\phi_0 = 30$  %. L'exacte superposition des deux permet de valider l'implémentation de la routine utilisateur UHYPER dans le cas où l'état de référence est préalablement gonflé.

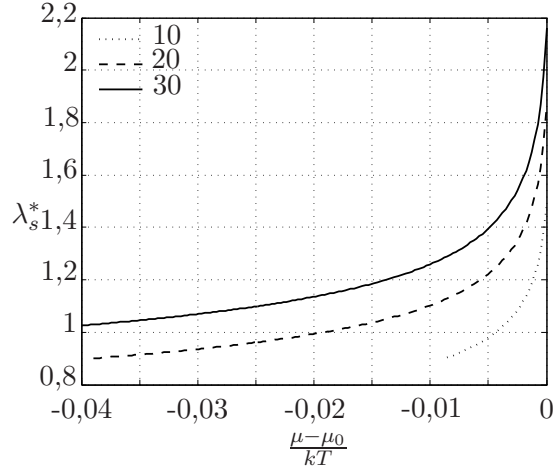


FIGURE 2.24 – Influence de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé  $\phi_0$  sur le comportement en gonflement libre de contrainte (état de référence préalablement gonflé). L'élongation est représentée en fonction du potentiel chimique (avec  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa et  $\chi = 0,1$  fixé). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

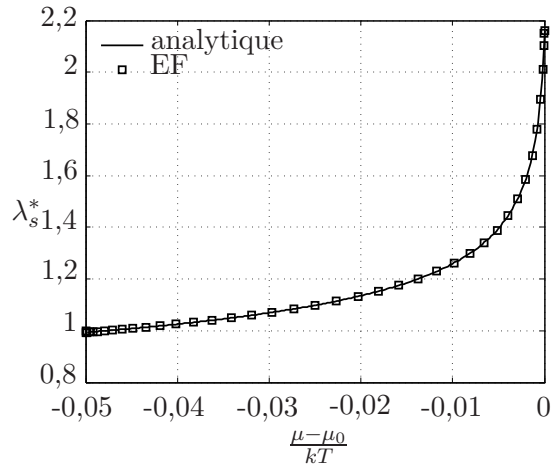


FIGURE 2.25 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de gonflement libre de contrainte (état de référence préalablement gonflé). L'élongation est représentée en fonction du potentiel chimique ( $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$ ,  $\phi_0 = 30$  %). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

### b. Gonflement uniaxial

Notant  $\lambda^*$  l'élongation dans la direction  $Y$ , l'état de déformation est caractérisé par le gradient de transformation :

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (J_s^* = \lambda^*), \quad (2.251)$$



et le tenseur des contraintes est donné par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}. \quad (2.252)$$

Le même raisonnement que celui qui mène de l'équation (2.184) à (2.188) permet d'écrire la relation qui prédit l'élongation  $\lambda^*$  dans la direction normale au plan en fonction du potentiel chimique :

$$\frac{\mu - \mu_0}{kT} = \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{\lambda^*} \right) + \frac{\phi_0}{\lambda^*} + \frac{\chi \phi_0^2}{(\lambda^*)^2} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[ \lambda^* - (\lambda^*)^{-1} \right], \quad (2.253)$$

et l'équation traduisant l'**équilibre pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé en gonflement uniaxial** vérifiée par  $\lambda^{*e}$  :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{\lambda^{*e}} \right) + \frac{\phi_0}{\lambda^{*e}} + \frac{\chi \phi_0^2}{(\lambda^{*e})^2} \right] + \left[ \lambda^{*e} - (\lambda^{*e})^{-1} \right] = 0. \quad (2.254)$$

La Figure 2.26 montre l'évolution de l'élongation dans la direction normale au plan  $\lambda^*$  et la contrainte de Piola-Kirchhoff normalisée en fonction de la variation du potentiel chimique (jusqu'à atteindre l'équilibre) pour différentes fractions volumiques de polymère ( $\phi_0 = 10, 20, 30$  %) dans l'état de référence. A nouveau, on observe qu'une augmentation de  $\phi_0$  entraîne une augmentation de l'élongation, et donc une augmentation du gonflement (Figure 2.26a). De plus, une augmentation de  $\phi_0$  entraîne une augmentation de la contrainte (en valeur absolue) (Figure 2.26b). En effet, plus l'échantillon contient de solvant dans l'état de référence, moins il est raide.

Enfin, la Figure 2.27, qui compare les résultats EF aux résultats analytiques, pour  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0, 1$  et  $\phi_0 = 30$  % permet confirmer la validation de l'implémentation de la routine utilisateur UHYPER dans le cas où l'état de référence est préalablement gonflé.

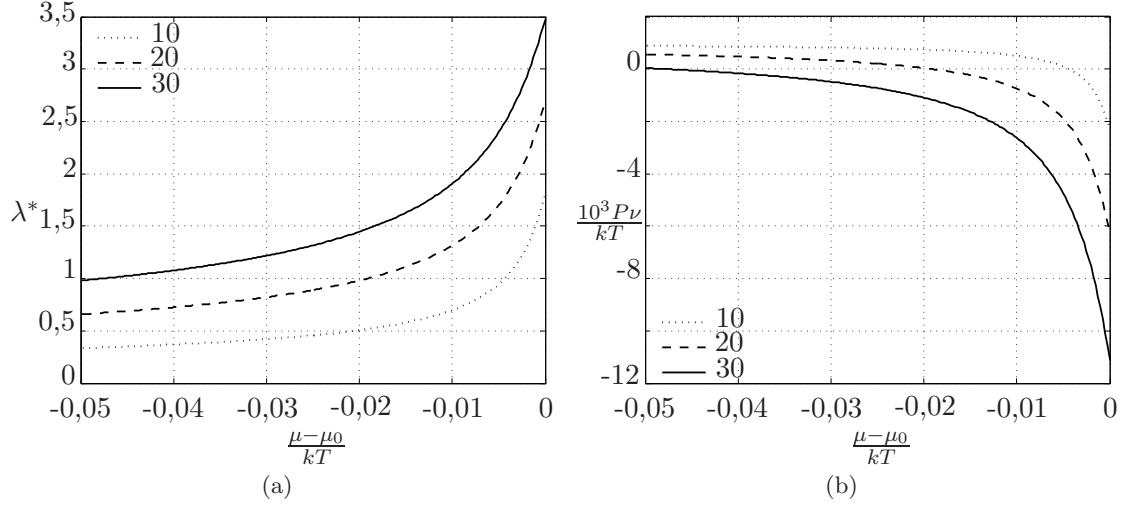


FIGURE 2.26 – Influence de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé  $\phi_0$  sur le comportement en gonflement uniaxial (état de référence préalablement gonflé). L'élongation (a) et la contrainte normalisée (b) sont présentées en fonction du potentiel chimique (avec  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  et  $\chi = 0,1$  fixé). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

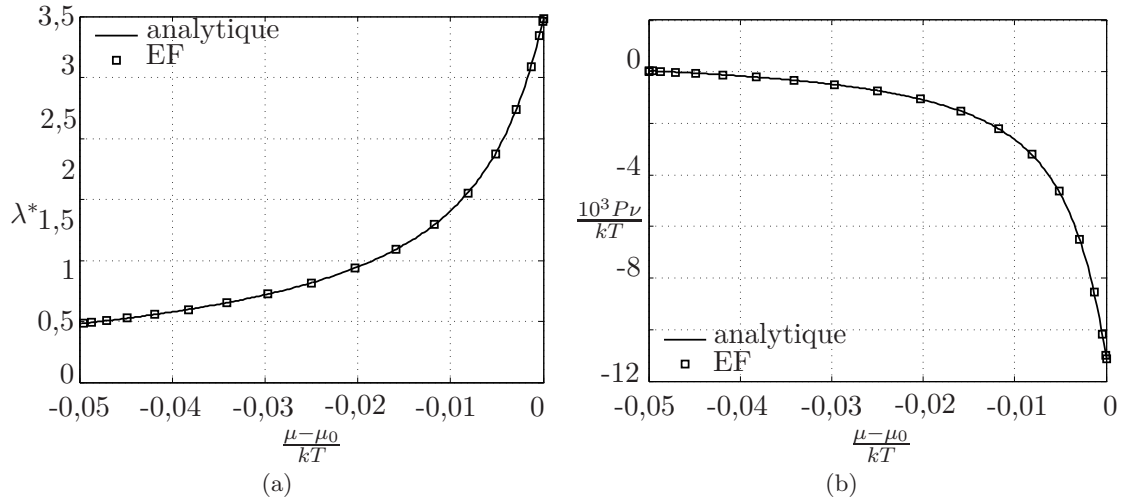


FIGURE 2.27 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de gonflement uniaxial (état de référence préalablement gonflé). L'élongation (a) et la contrainte normalisée (b) sont représentées en fonction du potentiel chimique ( $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$ ,  $\phi_0 = 30$  %). L'équilibre est atteint lorsque  $(\mu - \mu_0)/(kT) = 0$ .

### c. Traction/compression uniaxiale et gonflement combinés

Notant  $\lambda_l^*$  l'élongation longitudinale dans la direction  $X$ , et  $\lambda_t^*$  l'élongation transverse dans les directions  $Y$  et  $Z$ , l'état de déformation est caractérisé par le gradient de trans-

formation :

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \lambda_l^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_t^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_t^* \end{bmatrix} \quad (J_s^* = \lambda_l^* \lambda_t^{*2}), \quad (2.255)$$

et le tenseur des contraintes est donné par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.256)$$

Le même raisonnement que celui qui mène de l'équation (2.191) à (2.195) donne la relation qui permet de calculer l'élongation transverse  $\lambda_t^*$  en fonction du potentiel chimique, pour une élongation longitudinale  $\lambda_l^*$  imposée :

$$\frac{\mu - \mu_0}{kT} = \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{\lambda_l^* (\lambda_t^*)^2} \right) + \frac{\phi_0}{\lambda_l^* (\lambda_t^*)^2} + \frac{\chi \phi_0^2}{[\lambda_l^* (\lambda_t^*)^2]^2} \right] + \frac{1}{\gamma} (\lambda_l^*)^{-1} [1 - (\lambda_t^*)^{-2}], \quad (2.257)$$

ainsi que l'équation d'équilibre pour le modèle où l'état de référence est préalablement gonflé en traction/compression uniaxiale et gonflement combinés vérifiée par  $\lambda_l^{*e}$  et  $\lambda_t^{*e}$  (élongation longitudinale et transverse à l'équilibre) :

$$\gamma \left[ \ln \left( 1 - \frac{\phi_0}{\lambda_l^{*e} (\lambda_t^{*e})^2} \right) + \frac{\phi_0}{\lambda_l^{*e} (\lambda_t^{*e})^2} + \frac{\chi \phi_0^2}{[\lambda_l^{*e} (\lambda_t^{*e})^2]^2} \right] + (\lambda_l^{*e})^{-1} [1 - (\lambda_t^{*e})^{-2}] = 0. \quad (2.258)$$

La Figure 2.28 montre l'influence de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence sur le comportement en traction/compression d'un échantillon dans un excès de solvant. L'évolution de l'élongation transverse  $\lambda_t^{*e}$  est représentée en fonction de l'élongation longitudinale  $\lambda_l^{*e}$  et la contrainte de Piola-Kirchhoff normalisée est représentée en fonction du rapport  $\lambda_l^{*e}/\lambda^e$  représentant l'élongation (en traction ou compression) par rapport à l'état d'équilibre gonflé, pour  $\phi_0 = 10, 20, 30$  %. A nouveau, on observe qu'une augmentation de  $\phi_0$  entraîne une augmentation du gonflement (cf Figure 2.28a, la valeur de  $\lambda^e$  est obtenue à l'intersection avec la droite en pointillés noirs). De plus, une augmentation de  $\phi_0$  entraîne une augmentation de la contrainte en valeur absolue (Figure 2.28b) : plus l'échantillon contient de solvant dans l'état de référence, moins il est raide.

Enfin, la Figure 2.29, qui compare les résultats EF aux résultats analytiques, pour  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0, 1$  et  $\phi_0 = 30$  % permet de confirmer la validation de l'implantation de la routine utilisateur UHYPER dans le cas où l'état de référence est préalablement gonflé.

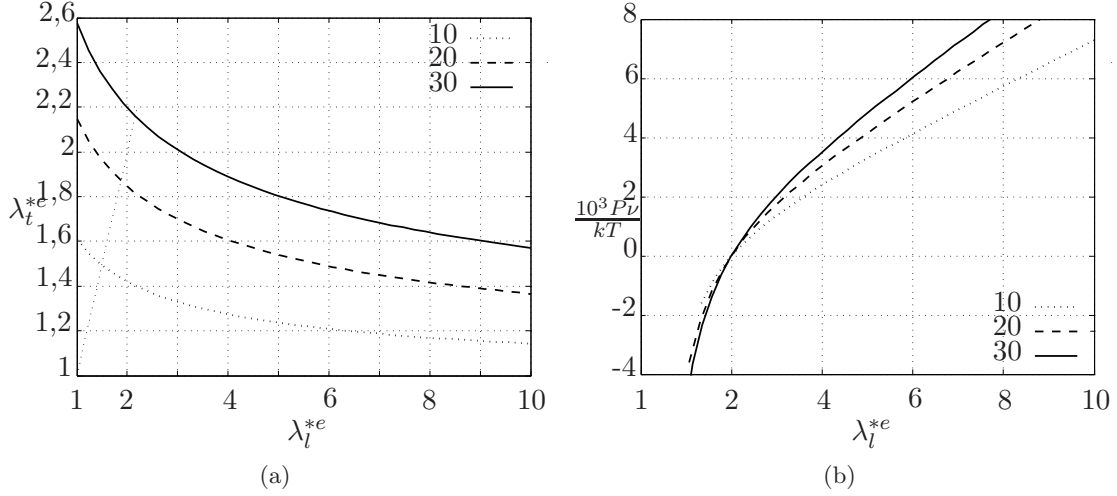


FIGURE 2.28 – Influence de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence préalablement gonflé  $\phi_0$  sur le comportement en traction/compression uniaxiale (état de référence préalablement gonflé). (a) Elongation transverse en fonction de l'élongation longitudinale ; (b) Contrainte longitudinale (Piola-Kirchhoff) normalisée en fonction de l'élongation longitudinale (avec  $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  et  $\chi = 0,1$  fixé).

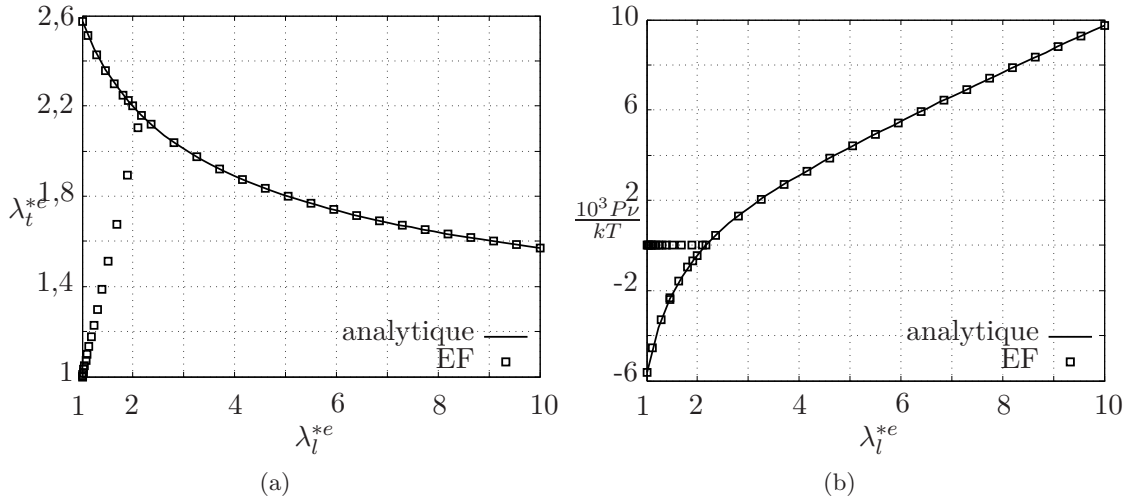


FIGURE 2.29 – Comparaison des résultats analytiques et EF sur l'exemple de gonflement uniaxial (état de référence préalablement gonflé). (a) Elongation transverse en fonction de l'élongation longitudinale ; (b) Contrainte longitudinale (Piola-Kirchhoff) normalisée en fonction de l'élongation longitudinale ( $C_0^* = 4 \cdot 10^4$  Pa,  $\chi = 0,1$ ,  $\phi_0 = 30\%$ ).

#### 2.4.4 Bilan

Dans cette section, un autre aspect original par rapport aux modèles classiques traitant du couplage entre grandes déformations et diffusion dans les gels a été développé : notre contribution repose sur la **définition d'un état de référence qui diffère de l'état sec et qui est supposé préalablement gonflé**, et caractérisé par sa composition initiale (par le biais de la fraction volumique de polymère ou de solvant). Les aspects théoriques

conduisant à l'obtention des équations constitutives ont été développés, et la mise en œuvre numérique pour la résolution des états d'équilibre par la Méthode des Eléments Finis dans le code de calcul ABAQUS au moyen d'une routine utilisateur a été effectuée.

Enfin, des exemples d'application dont la solution analytique est connue ont été étudiés. Comme précédemment, ces cas test ont, d'une part, permis de valider l'implémentation dans ABAQUS. D'autre part, l'influence de l'état initial (par l'intermédiaire de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence  $\phi_0$ ) sur le comportement a été étudié : on retiendra que  $\phi_0$  **faible favorise le gonflement**.

## 2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux matériaux de type « gel » et aux modèles couplant grandes déformations et diffusion pour décrire leur comportement.

Dans la première partie, la description d'un gel comme un réseau de chaînes de polymère réticulées susceptible de gonfler au contact d'un solvant approprié a été proposée. La compréhension de la thermodynamique du gonflement des gels passe par la compréhension des notions de mélange solvant-polymère, d'élasticité d'un réseau réticulé gonflé et de l'interaction entre les deux. Ces notions ont initialement été développées par Flory dans les années 1950 pour l'étude du comportement des élastomères gonflés, puis adaptées récemment (à partir des années 2000) au cadre tridimensionnel pour l'étude du comportement des gels.

Après un rappel des équations d'équilibre mises en jeu (deuxième partie), deux aspects originaux par rapport aux modèles déjà existants ou modèles classiques, ont été proposés : la prise en compte rigoureuse de l'évolution potentielle de la raideur du matériau en fonction du gonflement (troisième partie) et la prise en compte d'une configuration de référence préalablement gonflée (quatrième partie). Dans les deux cas, les développements thermodynamiques qui mènent aux équations constitutives (contrainte et potentiel chimique) ont été détaillés. L'implantation de ces modèles pour l'étude des états d'équilibre a été réalisée dans le code de calcul Eléments Finis ABAQUS au moyen d'une routine utilisateur UHYPER. Enfin, quelques exemples simples dont la solution analytique est connue ont été utilisés comme cas test afin de valider l'implantation d'une part, et étudier l'influence des paramètres des modèles d'autre part. Concernant ce dernier point, on retiendra que de faibles valeurs du module de cisaillement, du paramètre d'interaction solvant-polymère et de la fraction volumique de polymère dans l'état de référence gonflé ont tendance à favoriser le gonflement.

Le chapitre suivant propose l'utilisation du modèle développé sous son deuxième aspect pour le comportement du *Nucleus pulposus*.

## Chapitre 3

# Application au disque intervertébral : modélisation Eléments Finis

Ce troisième chapitre présente un modèle Eléments Finis (EF) du disque intervertébral utilisant les lois de comportement mises en place dans le chapitre précédent (cf section 2.4) pour le *Nucleus pulposus*. Dans un premier temps, une description de la mise en œuvre du modèle Eléments Finis est effectuée. Une géométrie 3D du DIV réaliste, basée sur des données issues de la littérature est d’abord proposée. La méthodologie mise en place pour l’application du chargement, comprenant une « étape d’initialisation » qui consiste en une étape de gonflement du NP, est également détaillée. La loi de comportement utilisée pour le NP est rappelée et les paramètres matériau sont précisés dans le cas d’un NP sain. Pour l’AF, une loi de comportement hyperélastique anisotrope est employée. Les paramètres matériau de l’AF sont identifiés par comparaison avec des données issues de la littérature sur un essai en compression. La réponse mécanique en compression est étudiée de façon plus approfondie afin de valider le modèle, et d’analyser le comportement du DIV lorsque les paramètres matériau du noyau central sont modifiés pour prendre en compte l’influence des propriétés d’un hydrogel de remplacement. Enfin, la réponse mécanique du DIV sous divers cas de chargement est examinée.

## Sommaire

---

<b>3.1 Mise en œuvre du modèle</b>	<b>111</b>
3.1.1 Géométrie 3D du disque intervertébral	111
3.1.2 Maillage	114
3.1.3 Méthodologie de chargement et conditions aux limites	116
3.1.4 Lois de comportement et propriétés matériau	117
3.1.5 Bilan	122
<b>3.2 Etude de la réponse mécanique du DIV en compression</b>	<b>123</b>
3.2.1 Validation du modèle	123
3.2.2 Influence du noyau central sur la réponse en compression du DIV	130
3.2.3 Bilan	136
<b>3.3 Etude de la réponse mécanique du DIV dans d'autres cas de chargement</b>	<b>137</b>
3.3.1 Méthodologie	137
3.3.2 Résultats selon le type de sollicitation	142
3.3.3 Bilan	164
<b>3.4 Discussion et conclusion</b>	<b>168</b>

---

### 3.1 Mise en œuvre du modèle

Cette section détaille la mise en œuvre numérique du modèle tridimensionnel du DIV. Celle-ci passe par la description précise de la géométrie choisie (section 3.1.1), du maillage (section 3.1.2), et de la démarche employée en vue de l'application d'un chargement (section 3.1.3). La description des lois de comportement utilisées pour les différentes structures composant le DIV est également abordée (section 3.1.4). L'ensemble du travail est réalisé dans le code de calcul Eléments Finis ABAQUS, dans lequel ont déjà été implémentées les routines utilisateur pour les modèles de gonflement, décrites dans le chapitre 2.

#### 3.1.1 Géométrie 3D du disque intervertébral

L'objectif est de proposer une **géométrie 3D caractéristique d'un modèle générique d'un DIV lombaire sain**, c'est-à-dire un modèle plus ou moins simplifié par rapport à la réalité et supposé statistiquement représentatif, dans lequel les trois structures caractéristiques du DIV (NP, AF et PC) sont distinguées.

Dans un premier temps, quelques hypothèses, qui restent raisonnables si l'on se réfère aux modèles existants (cf Tableau 1.2), sont formulées :

- le DIV est supposé symétrique dans le plan sagittal,
- la hauteur du DIV est supposée constante,
- la géométrie des PC est supposée correspondre directement avec celle du DIV dans le plan transverse
- l'épaisseur des PC est supposée constante.

Comme cela a été montré dans la section 1.2.1, la littérature rapporte une grande dispersion des données géométriques du DIV. Dans les modèles EF, ces dernières sont rarement décrites ou incomplètes (cf Tableau 1.2). Si la hauteur du DIV et l'épaisseur des PC ont été fixées à 10 mm et 1 mm respectivement, la détermination précise de la géométrie dans le plan transverse du DIV est plus délicate. En effet, à notre connaissance, seuls Little (2004), Denozière (2004), et Magnier (2009) dans leurs travaux de thèse fournissent des données géométriques (dans le plan transverse) de leur modèle qui sont suffisamment complètes pour être exploitables. En effet, les contours de l'AF et du NP sont fournis.

Afin de créer notre propre modèle générique de DIV, une « géométrie moyenne » dans le plan transverse est réalisée à l'aide des géométries de ces trois modèles. La méthodologie mise en place, inspirée du travail de Little *et al.* (2007b) pour le premier point, est la suivante (se référer aux Figures 3.1 et 3.2) :

- pour chaque modèle :
  - on munit le plan d'un repère orthonormé construit de la façon suivante :
    - on construit le rectangle  $ABCD$  (voir Figure 3.1) tel que :
      1.  $(AB)$  soit la tangente au DIV passant par les points  $P_1$  et  $P_2$  les plus postérieurs de la partie gauche et la partie droite du DIV respectivement,
      2.  $(CD)$  soit la tangente au DIV passant par le point  $P_3$  le plus antérieur du DIV et parallèle à la droite  $(AB)$ ,
      3.  $(AD)$  et  $(BC)$  soient les tangentes au DIV passant respectivement par le point le plus à gauche  $P_4$  et le point le plus à droite  $P_5$  et perpendiculaires aux droites  $(AB)$  et  $(CD)$ ,



- on définit le centre  $O$  du DIV comme le point d'intersection des diagonales du rectangle  $ABCD$ ,
- on définit un repère cartésien  $(O, X, Y)$  tel que  $X$  soit l'axe antéro-postérieur (dirigé dans le sens antérieur) du DIV et  $Y$  soit l'axe droite-gauche,
- les coordonnées des points du contour dans le plan  $(O, X, Y)$  de l'AF et du NP sont relevées,
- en utilisant l'hypothèse de symétrie du DIV dans le plan sagittal, l'ensemble des points de la partie droite du DIV sont ramenés dans le demi-espace des  $Y$  positifs (partie gauche) ;
- les coordonnées des contours moyens de l'AF et du NP de notre modèle sont calculés à partir de trois modèles de référence. Pour cela, les coordonnées des points des contours de référence sont exprimées dans le repère polaire  $(O, r, \theta)$  ; et, pour chaque valeur d'angle  $\theta$ , la moyenne des rayons des trois géométries de référence est calculée. Les coordonnées des contours moyens de l'AF et du NP sont finalement ré-exprimées dans le repère cartésien.

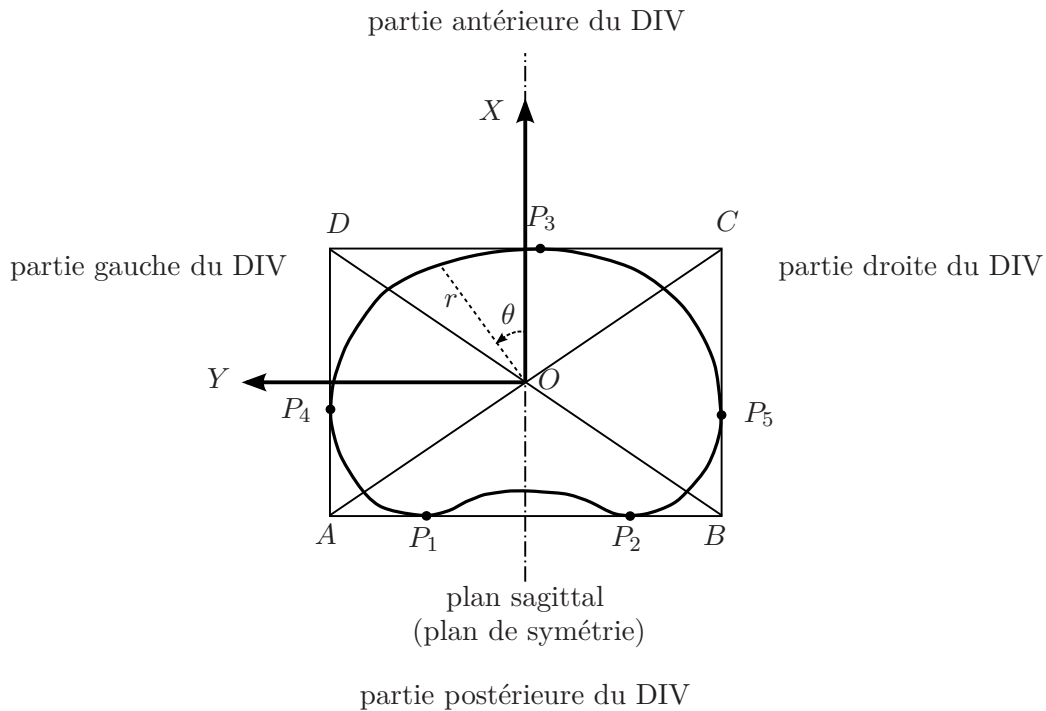


FIGURE 3.1 – Construction du repère orthonormé  $(O, X, Y)$  attaché à la géométrie du DIV dans le plan transverse.

Sur la Figure 3.2, les contours de l'AF et du NP des modèles de [Little \(2004\)](#), [Denozière \(2004\)](#), et [Magnier \(2009\)](#) sont représentés. Les lignes en pointillés rouges représentent les contours moyens de l'AF et du NP de notre modèle, calculés à partir de ces derniers. Ce DIV admet alors une section de  $1327 \text{ mm}^2$  et une section de  $504 \text{ mm}^2$ , soit un rapport de section entre le NP et le DIV total de 38 %, ce qui est en accord avec les données de la littérature. Le centre du NP se trouve décalé postérieurement de 1,3 mm par rapport au centre du DIV, ce qui correspond à l'ordre de grandeur des valeurs observées expérimentalement par [Little et al. \(2007b\)](#).

Selon la littérature, le nombre de lamelles de l'AF est compris entre 15 et 25. Or,

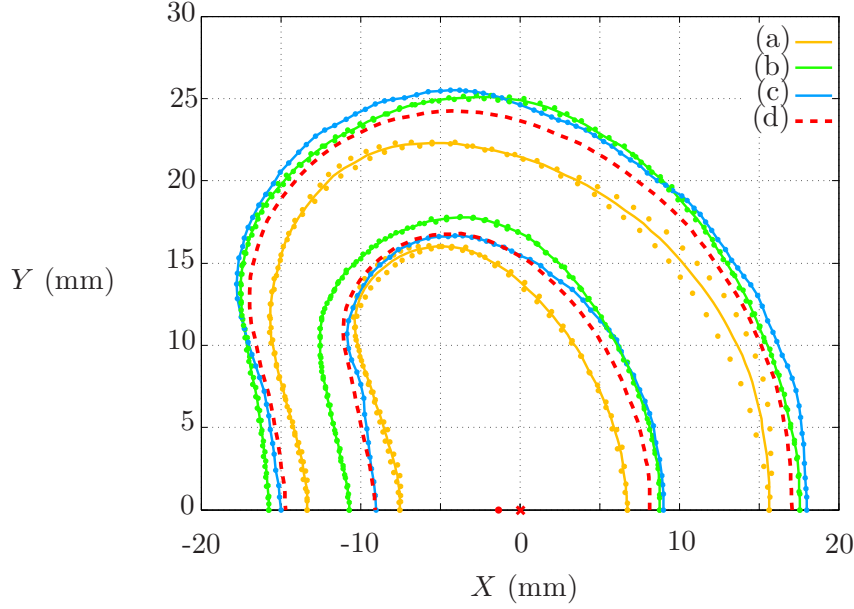


FIGURE 3.2 – Géométrie du DIV : représentation des contours moyens de l’AF et du NP en pointillés rouges (d) déterminés à partir des contours de l’AF et du NP de la littérature (a) [Little \(2004\)](#), (b) [Denozière \(2004\)](#), (c) [Magnier \(2009\)](#). Le centre du DIV moyen se situe en  $(0, 0)$  (représenté par une croix rouge) ; le centre du NP moyen a pour coordonnées  $(-1, 3; 0)$  (représenté par un cercle rouge plein).

dans la mesure où l’on envisage de traiter l’AF comme un milieu continu (voir ci-après la description de la loi de comportement anisotrope choisie), il est inutile de reproduire précisément cette structure lamellaire. Toutefois, afin d’anticiper la bonne gestion des orientations matérielles privilégiées du modèle anisotrope décrit ci-après (voir paragraphe [3.1.4.3](#)), l’AF est découpé dans son épaisseur en  $n = 6$  couches selon la méthode suivante :

- les coordonnées  $(X, Y)$  des contours de l’AF et du NP sont exprimées en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,
- pour chaque  $\theta$ , le rayon externe  $r_i$  de la  $i^{\text{ème}}$  couche est calculé par  $r_i = r_{NP} + i \times (r_{AF} - r_{NP})/n$ , où  $r_{AF}$  et  $r_{NP}$  désignent respectivement les rayons de l’AF et du NP pour l’angle  $\theta$  fixé,
- les coordonnées  $(r, \theta)$  sont ré-exprimées en coordonnées cartésiennes.

La Figure [3.3](#) montre le découpage de l’AF en 6 couches, selon la méthode expliquée précédemment. Le volume est obtenu par simple extrusion des formes planes décrites ci-avant. La Figure [3.4](#) montre la géométrie finale réalisée sous Abaqus, en vue 3D et en vue dans le plan transverse. On y distingue les PC inférieur et supérieur, ainsi que le NP et les différentes couches de l’AF.

**Remarque - Simplifications géométriques.** Les simplifications géométriques réalisées ici (épaisseur des PC et du DIV constante, symétrie par rapport au plan sagittal) nous paraissent raisonnables dans la mesure où la géométrie du DIV sans chargement n’est pas connue car observée *in vivo*. *A priori*, les simplifications effectuées auront peu d’influence sur les tendances étudiées.

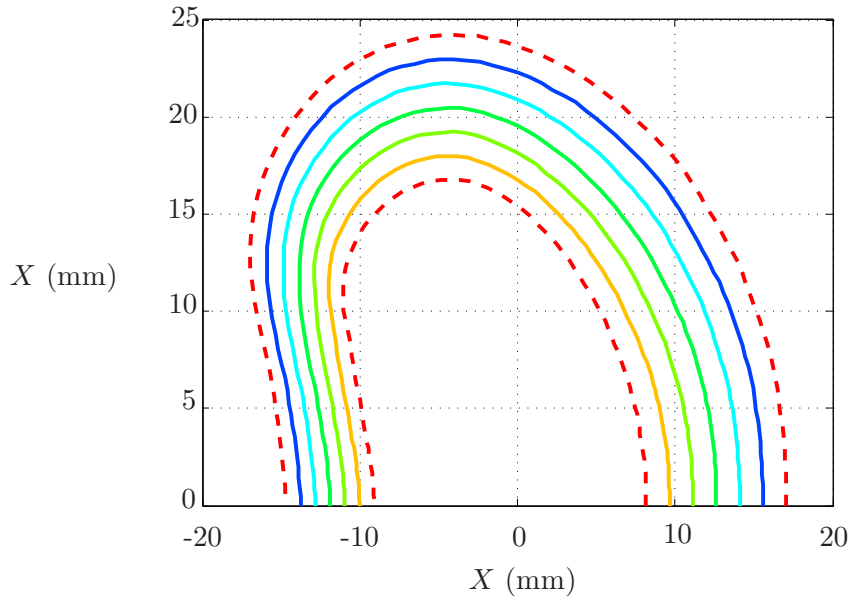


FIGURE 3.3 – Représentation de la géométrie de l’AF dans le plan transverse : 6 couches dans l’épaisseur sont considérées afin d’anticiper une bonne gestion des orientations matérielles privilégiées du modèle anisotrope (décrit dans le paragraphe 3.1.4.3). Les contours moyens de l’AF et du NP sont représenté en pointillés rouges.

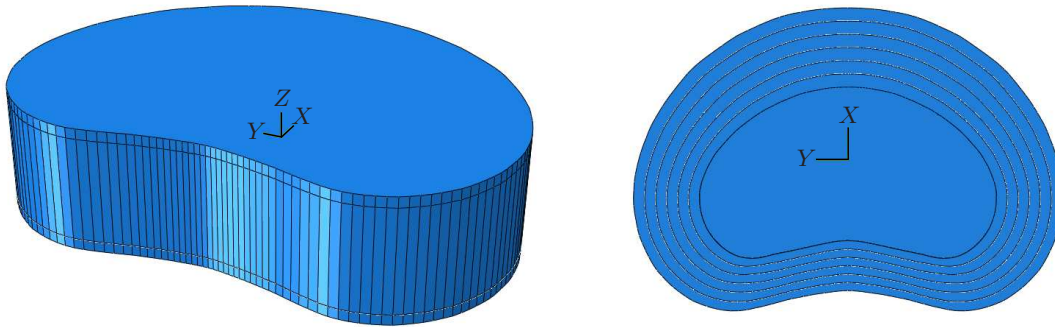


FIGURE 3.4 – Représentation de la géométrie finale du DIV sous ABAQUS. A gauche : vue 3D ; à droite : vue dans le plan transverse.

### 3.1.2 Maillage

Le maillage entier est réalisé au moyen d’éléments C3D8H hexaédriques linéaires avec une formulation hybride déplacement/pression. Afin de proposer un maillage présentant un bon compromis entre un temps de calcul raisonnable et une erreur commise sur la réponse acceptable, une analyse de convergence (sur neuf maillages, du plus grossier au plus fin) a été réalisée sur le modèle d’un quart de DIV sollicité en compression (en exploitant les symétries - géométrie et chargement - dans le plan transverse et le plan sagittal).

Le maillage le plus fin, que l’on considère comme maillage de référence, compte 151456 éléments et le temps de calcul pour obtenir la solution EF de référence est de 15315 s. La Figure 3.5 montre l’erreur commise sur la réponse en force par rapport au maillage de référence en fonction de l’inverse du nombre d’éléments du maillage (Figure 3.5a), ainsi

que le temps de calcul en fonction du nombre d'éléments (Figure 3.5b). Le maillage qui est retenu est le quatrième maillage. En effet, l'erreur commise est de 2,7 % par rapport à la solution EF de référence, tandis que le temps de calcul par rapport à la solution EF de référence est réduit de près de 95 %.

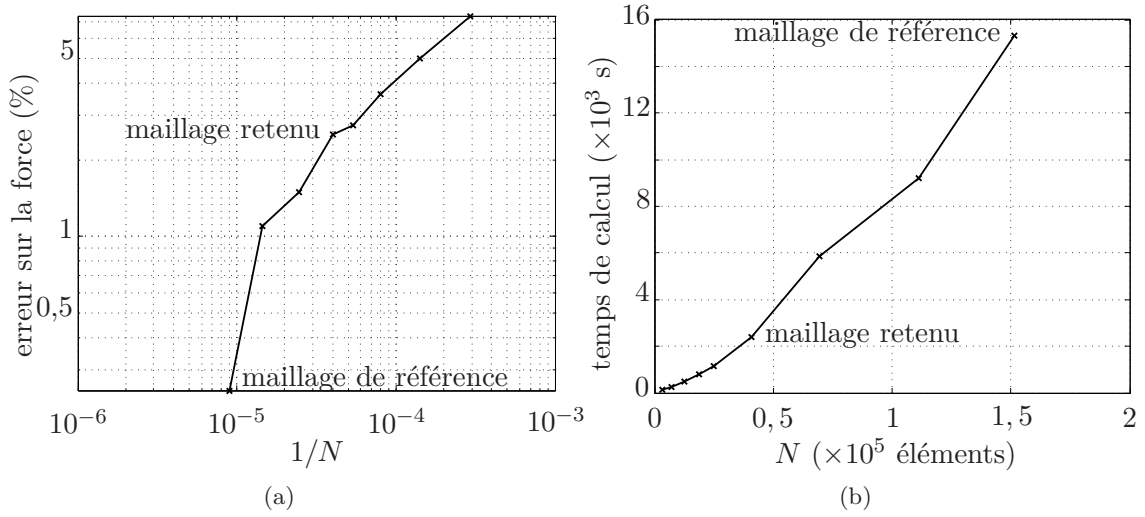


FIGURE 3.5 – Analyse convergence du maillage sur un quart de DIV : (a) erreur commise sur la réponse en force par rapport au maillage de référence en fonction de l'inverse du nombre d'éléments  $N$  du maillage, (b) temps de calcul en fonction du nombre d'éléments  $N$ .

Cette étude de convergence peut être étendue au cas du DIV complet en conservant la même densité de maillage (taille des éléments égale à 0,7 mm). Le maillage final du DIV, représenté sur la Figure 3.6, comporte finalement 85510 éléments et 115148 noeuds. La répartition du nombre d'éléments selon les différentes structures est donnée dans le tableau 3.1.

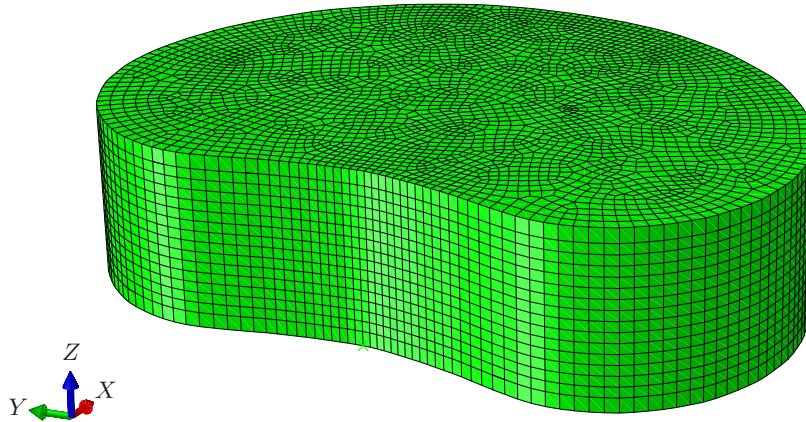


FIGURE 3.6 – Représentation du maillage du DIV complet sous ABAQUS.

Structure	Nombre d'éléments
NP	39172
AF (lamelle 1)	7490
AF (lamelle 2)	7322
AF (lamelle 3)	7056
AF (lamelle 4)	6622
AF (lamelle 5)	6188
AF (lamelle 6)	5628
PC supérieur	3016
PC inférieur	3016
total	85510

TABEAU 3.1 – Répartition du nombre d'éléments composant le maillage du DIV complet selon les structures représentées. La lamelle 1 de l'AF est la lamelle la plus interne ; la lamelle 6 est la plus externe.

### 3.1.3 Méthodologie de chargement et conditions aux limites

L'observation et l'étude du DIV dans différentes postures du quotidien montre que ce dernier est soumis à des chargements et des mouvements physiologiques complexes et variés. L'étude du DIV d'un individu en posture debout (sans charge supplémentaire portée par l'individu), que l'on considère comme posture de référence si l'on se réfère aux travaux de [Nachemson et Elfstrom \(1970\)](#) (cf Figure 1.8), montre que le DIV est constamment dans un état de compression (sous l'effet du poids du haut du corps) pour lequel le NP est sous pression (pression intradiscale évaluée à 0,5 MPa environ) et les fibres de l'AF sont en traction. L'étude du DIV dans d'autres postures révèle l'existence de mouvements physiologiques plus complexes constitués de mouvements éventuellement couplés en torsion, inclinaison, cisaillement, etc.

L'objectif de notre modèle EF est de pouvoir reproduire ces chargements physiologiques et simuler le comportement du DIV en réponse à ces chargements. Pour cela, des contraintes cinématiques sont appliquées sur le PC supérieur, tandis que le PC inférieur reste encastré.

Le chargement est alors décomposé en deux phases distinctes :

- **une phase d'« initialisation »** dans laquelle le DIV passe de sa géométrie initiale, créée en l'absence de tout chargement, à une géométrie que l'on pourrait appeler « géométrie *in vivo* » sur laquelle vont s'appliquer les sollicitations. Cette phase d'initialisation consiste en une phase de gonflement dans laquelle le NP est mis sous pression à l'intérieur de sa cavité. Mécaniquement, le PC supérieur est entièrement fixé, tout comme le PC inférieur. Le gonflement est réalisé en amenant le potentiel chimique du NP (depuis une valeur initiale déterminée en supposant qu'initialement le NP est non déformé et non contraint) vers l'équilibre (cf Figure 2.7). Les Figures 3.7 et 3.8 montrent l'évolution du DIV au cours de cette étape d'initialisation. Sous l'effet du gonflement du NP (contraint axialement par les deux PC), les fibres de l'AF sont placées dans un état de traction et on observe un renflement de l'AF externe,

visible sur la Figure 3.7 en vue 3D et sur la Figure 3.8 dans le plan sagittal. On peut remarquer que le renflement de l'AF est maximal (et assez important) postérieurement. Toutefois, ce déplacement peut être limité en modifiant les propriétés locales de l'AF (fibres plus raides postérieurement). La Figure 3.8 montre également que le NP a bien vu son volume augmenter au cours de l'étape d'initialisation. La Figure 3.9 montre la distribution de pression (positive et inhomogène) à l'intérieur du NP. **La configuration atteinte à la fin de la phase d'initialisation constitue alors la configuration initiale pour la phase suivante.**

- **la phase de sollicitation proprement dite** : compression, flexion/extension, torsion, inclinaison latérale, cisaillement antéro-postérieur, cisaillement latéral, etc., dans laquelle le potentiel chimique du NP est maintenu constant (égal à sa valeur à l'équilibre), et où le chargement est appliqué sur le PC supérieur, le PC inférieur étant encastré. Généralement, par simplicité dans la réalisation, le contrôle du chargement lors des simulations se fait à déplacement ou angle imposé.

**Remarque - Sur la configuration obtenue à la fin de l'étape d'initialisation.** La question que l'on peut légitimement se poser est la suivante : est-ce que la configuration obtenue à la fin de l'étape d'initialisation, c'est-à-dire la configuration initiale pour les autres sollicitations, est réaliste ? Dans la mesure où on ne connaît jamais l'état théorique de départ, il est difficile de répondre à cette question. Pour connaître la configuration du DIV réelle, il faudrait pouvoir mesurer la géométrie *in vivo* sans contrainte (en apesanteur!).

Au vu de la méthodologie mise en place pour l'application d'un chargement, dans toute la suite de ce travail, lorsque l'on observera la réponse mécanique du DIV soumis à une sollicitation particulière, les résultats EF seront calculés par rapport à l'étape de fin de gonflement (ce sera, en général, le cas pour les réponses en force/moment ou déplacement/angle, pression). Dans le cas contraire, on précisera que la réponse mécanique observée est la réponse mécanique totale du DIV (suite à l'étape d'initialisation et de sollicitation).

**Remarque - Type de chargement.** Seuls des chargements monotones seront envisagés dans ce travail. De par la nature du modèle mis en place, la notion de cinétique est absente et seuls les états d'équilibre sont considérés. Une suppression de la charge (que ce soit en termes de potentiel chimique ou de chargement mécanique) conduirait à un retour parfait à l'état initial.

### 3.1.4 Lois de comportement et propriétés matériau

Le modèle du DIV est composé de trois structures distinctes possédant chacune un comportement mécanique propre, comme cela a été mis en évidence dans la section 1.2. Les lois qui décrivent ces comportements sont données pour chacune de ces structures.

#### 3.1.4.1 Plateaux cartilagineux

Comme évoqué auparavant, les plateaux cartilagineux, fine structure intercalée entre les corps vertébraux et le complexe AF-NP, jouent majoritairement un rôle dans le transport nutritionnel, et leur contribution au comportement mécanique du DIV peut être considérée



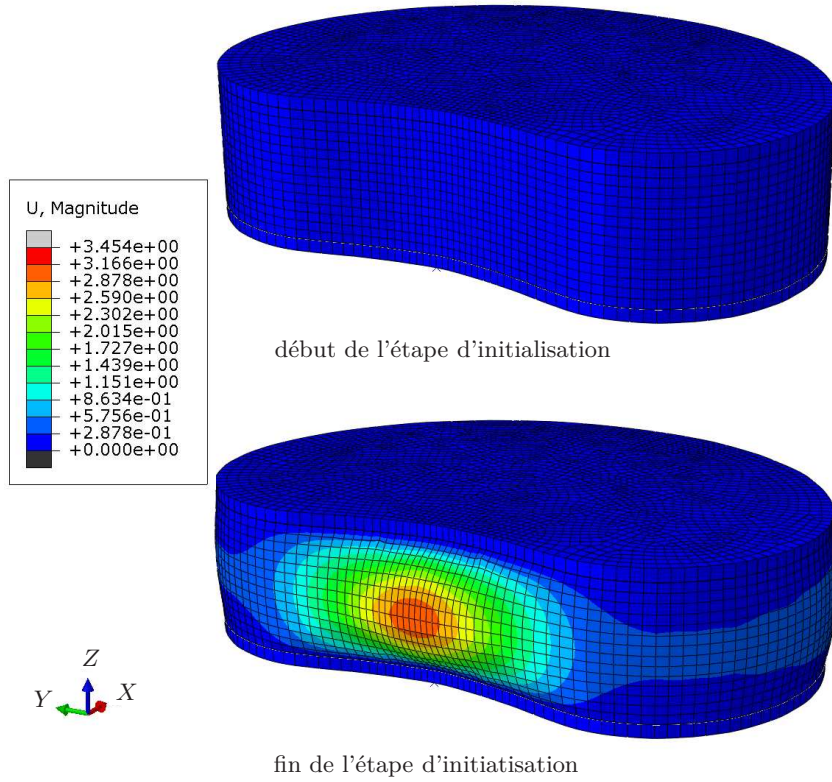


FIGURE 3.7 – Amplitude du déplacement au cours de l'étape d'initialisation. Le NP gonfle à l'intérieur de sa cavité, ce qui induit un renflement de l'AF, qui est maximal postérieurement.

comme négligeable, car ils sont considérés rigides, étant liés aux corps vertébraux. La raideur des PC, parfois assimilée à la raideur des corps vertébraux adjacents (Baroud *et al.*, 2003 ; Denozière, 2004 ; Ferguson *et al.*, 2004 ; Silva *et al.*, 2005 ; Denozière et Ku, 2006 ; Kuo *et al.*, 2010), est largement supérieure à celle de l'AF et du NP. Dans ce modèle, afin de se concentrer sur le comportement mécanique de la structure AF-NP, suffisamment complexe, les PC sont traités comme des **solides infiniment rigides** (Fagan *et al.*, 2002).

#### 3.1.4.2 Nucleus pulposus

Il a également été vu auparavant que le NP, structure centrale du DIV, possède plus de 80 % d'eau dans son état sain. Il contient également de petites fibres de collagène orientées aléatoirement, ce qui lui confère un comportement isotrope. Il contient également des protéoglycanes, molécules très hydrophiles, qui permettent au NP de s'imprégner d'eau et de gonfler naturellement.

L'enjeu ici est donc de modéliser le comportement du NP avec le **modèle de gonflement à partir d'une configuration de référence préalablement gonflée**, développée dans le chapitre 2 (section 2.4). On rappelle que cette loi de comportement repose sur la donnée de la densité d'énergie libre  $\tilde{\Psi}^*$  (exprimée par unité de volume de référence), s'écrivant comme la somme de trois contributions (respectivement la contribution du solvant pur  $\tilde{\Psi}_{\text{pur}}^*$ , la contribution du mélange solvant-polymère  $\Psi_{\text{mix}}^*$ , la contribution mécanique

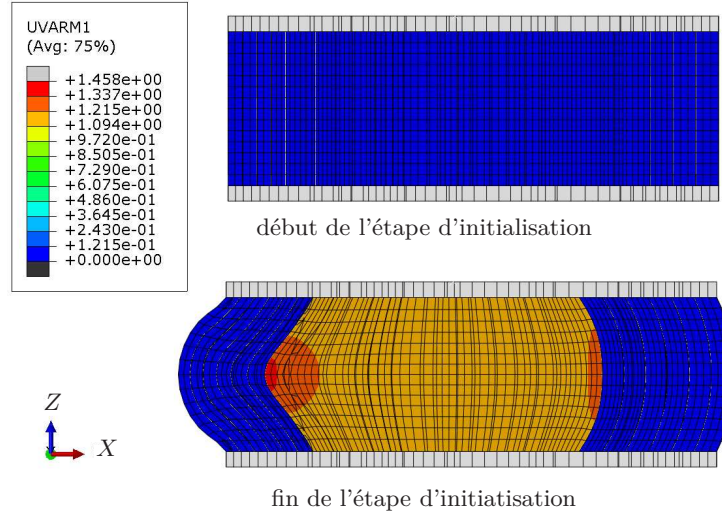


FIGURE 3.8 – Variation de volume  $J_s^*$ , donnée par la variable UVARM1, au cours de l'étape d'initialisation (dans le plan sagittal du DIV). Au début de l'étape de gonflement (avant le premier incrément de chargement), la variable UVARM1 n'est pas encore initialisée, elle vaut donc 0 dans l'ensemble du modèle (notons que UVARM1 est seulement définie pour le NP et n'a pas de sens pour l'AF : on a donc UVARM1=0 tout au long de l'étape de gonflement pour l'AF). Dans le NP, on a  $J_s^* > 1$ , ce qui traduit bien une augmentation de son volume.

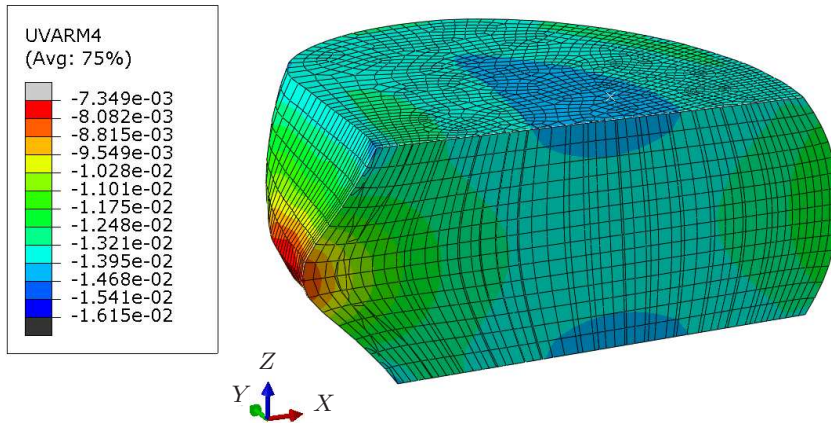


FIGURE 3.9 – Distribution de la pression à l'intérieur du NP à la fin de l'étape d'initialisation. La variable UVARM4 désigne le rapport  $-P/(kT/\nu)$ . La pression intradiscale est bien positive  $P$ , et inhomogène à l'intérieur du NP.

$\Psi_{\text{méca}}^*$ ) sous la forme :

$$\tilde{\Psi}^* = \tilde{\Psi}_{\text{pur}}^* + \tilde{\Psi}_{\text{mix}}^* + \tilde{\Psi}_{\text{méca}}^*,$$



avec :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{\text{pur}}^* &= \frac{\mu_0}{\nu} (J_s^* - 1), \\ \Psi_{\text{mix}}^* &= \frac{kT}{\nu} \frac{1}{J_{s,0}} (J_{s,0} J_s^* - 1) \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{J_{s,0} J_s^*} \right) + \frac{\chi}{J_{s,0} J_s^*} \right], \\ \Psi_{\text{méca}}^* &= \frac{C_0^*}{2} (I_1^* - 3 - 2 \ln J_s^*),\end{aligned}$$

où

$$J_{s,0} = \frac{1}{\phi_0} = \frac{1}{1 - \phi_{f,0}}, \quad (3.1)$$

et  $\phi_0$  et  $\phi_{f,0}$  désignent respectivement la fraction volumique de polymère et la fraction volumique de fluide dans l'état de référence.

Dans le cas du NP ou d'un matériau de remplacement de type hydrogel, le solvant est de l'eau. Le terme de « polymère » est bien adapté au cas de l'hydrogel de substitution ; en revanche, en ce qui concerne le NP, le « polymère » représente en réalité la matrice extracellulaire (protéoglycanes + fibres de collagène). Dans la suite de ce travail, on utilisera souvent le terme de « **noyau central** » pour pouvoir englober les possibilités offertes par le modèle : traiter le cas du NP ou observer la réponse lorsque ce dernier est remplacé par un hydrogel. Les différentes grandeurs et variables qui interviennent dans les relations (3.1) ainsi que leur signification, sont rappelées dans le tableau 3.2.

	Grandeur	Signification
Paramètres matériau	$C_0^*$	module de cisaillement du « noyau central » dans l'état de référence
	$\chi$	paramètre d'interaction eau-« polymère » (ou matrice extracellulaire)
	$\phi_{f,0}$	fraction volumique d'eau dans l'état de référence
Constantes	$\mu_0$	potentiel chimique du solvant pur (eau)
	$k$	constante de Boltzmann ( $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ )
	$T$	température (20°C)
	$\nu$	volume d'une molécule d'eau ( $3,0 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ )
Variables	$I_1^*$	premier invariant de la déformation
	$J_s^*$	variable qui caractérise le gonflement le long de la déformation

TABLEAU 3.2 – Signification des différentes grandeurs et variables qui interviennent dans le modèle de gonflement avec prise en compte d'une configuration de référence préalablement gonflée : application au NP ou à un hydrogel de substitution.

Pour la modélisation du comportement du NP (sain ou dégénéré) ou d'un matériau de remplacement de type hydrogel, il faut imaginer que les valeurs prises par les trois paramètres matériau pourront s'étendre, *a priori*, sur une large gamme :

- raideur  $C_0^*$  : l'examen des valeurs considérées dans la littérature (cf Tableaux 1.6 et 1.7) met en évidence une plage de valeurs pour le NP qui s'étend de 10 kPa à 10 MPa. Pour un hydrogel de remplacement, l'ordre de grandeur se situe aux alentours de 1 kPa à 100 kPa.

- fraction volumique d’eau dans l’état de référence  $\phi_{f,0}$  : pour un NP sain, la fraction volumique d’eau vaut environ 80 % et la dégénérescence se traduit par une perte sévère en eau. Les hydrogels de remplacement possèdent généralement une teneur en eau supérieure à 95 %.
- paramètre d’interaction  $\chi$  : d’après la littérature (voir par exemple [Mark \(1999\)](#)), les mélanges solvant-polymère sont caractérisés par  $\chi$  tel que  $0 < \chi < \chi_c$ , avec  $\chi_c$  une valeur critique au-delà de laquelle solvant et polymère ne sont plus miscibles (en pratique,  $\chi_c \approx 0,5$ ). Pour le NP,  $\chi$  apparaît comme une inconnue du problème. Néanmoins, l’étude de l’influence des paramètres matériau qui interviennent dans ce modèle de gonflement réalisée dans le chapitre 2 a montré que des valeurs de  $\chi$  faibles étaient caractéristiques d’une bonne affinité chimique entre le polymère et son solvant et favorisaient le gonflement. Dès lors, pour un NP sain et très hydrophile, on choisirait  $\chi$  proche de 0,1 et la dégénérescence pourrait être vue comme une augmentation progressive de ce paramètre jusqu’à 0,5.

### 3.1.4.3 *Annulus fibrosus*

Comme cela a été également décrit précédemment, l’AF possède une structure constituée de couches concentriques de lamelles de fibres de collagène orientées alternativement de  $\pm 30^\circ$  par rapport au plan transverse du DIV, lui conférant ainsi un comportement anisotrope. Le modèle qui est utilisé pour l’AF est un **modèle hyperélastique anisotrope, avec deux familles de fibres** orientées chacune dans une direction privilégiée, proposé par [Gasser et al. \(2006\)](#). Ce modèle, initialement conçu pour modéliser le comportement des parois artérielles, est disponible dans ABAQUS.

Dans ce modèle, [Gasser et al. \(2006\)](#) supposent que le potentiel hyperélastique anisotrope  $\bar{\Psi}$  peut être vu comme la superposition d’un potentiel hyperélastique isotrope  $\bar{\Psi}_m$  pour la substance fondamentale (privée de fibres de collagène) et de deux potentiels isotropes transverses  $\bar{\Psi}_{f,i}$  ( $i = 1, 2$ ) pour les deux familles de fibres :

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_i) = \bar{\Psi}_m(\bar{\mathbf{C}}) + \sum_{i=1,2} \bar{\Psi}_{f,i}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_i(\mathbf{a}_{0,i}, \kappa)). \quad (3.2)$$

Dans l’expression (3.2),

$$\bar{\Psi}_m(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{C_{10}}{2}(\bar{I}_1 - 3) \quad (3.3)$$

désigne le potentiel néo-Hookéen incompressible isotrope utilisé pour modéliser la substance fondamentale, dans lequel  $C_{10}$  est le paramètre matériau correspondant à la raideur de la matrice, et  $\bar{I}_1$  est le premier invariant réduit associé à la déformation<sup>1</sup>. L’énergie libre isotrope transverse de la  $i^{\text{ème}}$  famille de fibres de collagène est donnée par l’expression :

$$\bar{\Psi}_{f,i}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_i) = \frac{k_1}{2k_2} \left[ \exp(k_2 \bar{E}_i^2) - 1 \right], \quad (3.4)$$

où  $k_1$  est un paramètre matériau correspondant à la raideur des fibres de collagène,  $k_2$  est également un paramètre matériau sans dimension traduisant le comportement non-linéaire des fibres, et  $\bar{E}_i$  est défini par l’expression :

$$\bar{E}_i = \mathbf{H}_i : \bar{\mathbf{C}} - 1, \quad (3.5)$$

---

1. Le formalisme utilisé est le formalisme de [Holzapfel \(2000\)](#) :  $\bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{C}}$ , avec  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \bar{\mathbf{F}}$ .

avec

$$\mathbf{H}_i = \kappa \mathbf{I} + (1 - 3\kappa) (\mathbf{a}_{0,i} \otimes \mathbf{a}_{0,i}), \quad (3.6)$$

de sorte que  $\bar{E}_i$  caractérise la déformation dans la direction d'orientation moyenne  $\mathbf{a}_{0,i}$  de la  $i^{\text{ème}}$  famille de fibres, où le tenseur du second ordre  $\mathbf{H}_i$  caractérise la structure par l'intermédiaire de  $\kappa$ , paramètre de dispersion des fibres par rapport à la direction d'orientation moyenne  $\mathbf{a}_{0,i}$ .

Notons que cette loi de comportement compte un total de six paramètres matériau :

- la raideur de la matrice de l'AF  $C_{10}$ ,
- la raideur des fibres de collagène  $k_1$ ,
- le paramètre traduisant la non-linéarité des fibres  $k_2$ ,
- le paramètre de dispersion des fibres autour de leur direction moyenne  $\kappa$ ,
- les deux directions d'orientation des deux familles de fibre  $\mathbf{a}_{0,1}$  et  $\mathbf{a}_{0,2}$  par rapport au plan transverse du DIV.

**Remarque - Mise en œuvre pratique sous ABAQUS : points délicats.**

Deux points précis requièrent une attention particulière lors de la réalisation du modèle dans ABAQUS.

- La réalisation du modèle sous ABAQUS se fait, presque dans la totalité, grâce à l'interface ABAQUS/CAE. Néanmoins, certains concepts ne peuvent pas directement être réalisés sous ABAQUS/CAE et il est nécessaire, pour l'utilisateur, d'intervenir manuellement dans le fichier d'entrée .inp ([ABAQUS 6.11, 2011](#)). C'est le cas pour entrer les paramètres matériau du NP, ainsi que pour définir les directions d'orientation locale pour l'AF.
- On rappelle que la loi de comportement pour le NP a été implémentée en utilisant une formulation de l'énergie adimensionnalisée par le terme  $kT/\nu$ , afin d'éviter certains problèmes numériques. Par conséquent, les grandeurs de sortie calculées par ABAQUS pour le NP (telles que force, moment, contrainte, pression, etc.) sont également adimensionnalisées par ce même terme. Dès lors, pour rester cohérent, les paramètres matériau de l'AF  $C_{10}$  et  $k_1$  sont également adimensionnalisés par  $kT/\nu$ . L'ensemble des grandeurs de sortie devra finalement subir une étape de post-traitement pour obtenir les valeurs réelles non adimensionnalisées.

### 3.1.5 Bilan

A partir des données les plus complètes possibles disponibles dans la littérature, une géométrie 3D du DIV a été réalisée : les PC, le NP, ainsi que l'AF (découpé dans l'épaisseur en plusieurs couches) ont été représentés. Quelques hypothèses ont toutefois été avancées afin de simplifier le modèle en première approche : le DIV est considéré symétrique par rapport au plan sagittal, la hauteur du DIV est considérée constante. Ces hypothèses restent, à notre sens, raisonnables et sont largement utilisées dans la littérature.

Concernant le chargement, la méthodologie qui est appliquée repose sur la succession de deux phases : une phase d'initialisation dans laquelle le NP est amené à gonfler dans sa cavité, puis une phase de sollicitation proprement dite.

Le comportement du NP a été modélisé par la loi de gonflement élaborée dans la section 2.4, tandis que, pour l'AF, un modèle hyperélastique anisotrope avec deux familles

de fibres a été utilisé. Les PC, quant à eux, sont modélisés par des corps rigides.

La section suivante propose une étude de la réponse mécanique d'un DIV sain sous un chargement en compression. Les paramètres matériau de l'AF sont d'abord identifiés, puis le modèle est validé qualitativement par confrontation avec des données expérimentales. Dans un second temps, l'influence des paramètres du noyau central sur le comportement du DIV en compression est examinée.

## 3.2 Etude de la réponse mécanique du DIV en compression

### 3.2.1 Validation du modèle

Afin de reproduire le comportement d'un NP sain, les paramètres suivants sont choisis pour le NP :

- une fraction volumique d'eau initiale  $\phi_{f,0} = 80\%$ ,
- un module de cisaillement initial  $C_0^* = 0,5$  MPa, ce qui constitue une valeur assez « moyenne », compte tenu des valeurs de la littérature (cf tableaux 1.6 et 1.7),
- un paramètre d'interaction eau-matrice extracellulaire  $\chi = 0,1$ , assez faible pour que le NP soit très hydrophile.

Concernant l'AF, on a vu précédemment que la loi de comportement compte six paramètres matériau. Afin de simplifier le problème, on effectue les hypothèses suivantes :

- les angles entre les deux directions d'orientation moyenne des fibres  $\mathbf{a}_{0,1}$  et  $\mathbf{a}_{0,2}$  et le plan transverse sont supposés constants et égaux à  $+30^\circ$  et  $-30^\circ$  respectivement,
- il n'y a pas de dispersion des fibres autour de la direction d'orientation moyenne  $\mathbf{a}_{0,i} (i = 1, 2)$ , c'est-à-dire  $\kappa = 0$  (anisotropie maximale).

La discussion concerne donc les paramètres restants de l'AF :  $C_{10}$  (raideur de la matrice),  $k_1$  (raideur des fibres) et  $k_2$  (paramètre responsable de la non-linéarité des fibres). Les valeurs utilisées dans les modèles existants dans la littérature sont regroupées dans le tableau 3.3.

$C_{10}$ (MPa)	$k_1$ (MPa)	$k_2$ (-)	Référence
0,25	3/2/5 <sup>a</sup>	45/190/10 <sup>a</sup>	Eberlein <i>et al.</i> (2001)
0,11	1,1	27,33	O'Connell <i>et al.</i> (2009)
0,1	3,6	11	Moramarco <i>et al.</i> (2010)

TABLEAU 3.3 – Paramètres matériau  $C_{10}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  pour l'AF utilisés dans la littérature.  
Note : <sup>a</sup> - Trois valeurs pour  $k_1$  et  $k_2$  sont utilisées par Eberlein *et al.* (2001). Le couple ( $k_1 = 3$  MPa,  $k_2 = 45$ ) provient d'un recalage moyen des paramètres sur les courbes contrainte-déformation de deux échantillons de fibres de collagène prélevés à deux emplacements distincts au sein de l'AF (à la périphérie externe de l'AF et dans l'AF interne); le couple ( $k_1 = 2$  MPa,  $k_2 = 190$ ) provient du recalage sur l'échantillon issu de l'AF externe; le couple ( $k_1 = 5$  MPa,  $k_2 = 10$ ) correspond au recalage sur l'échantillon issu de l'AF interne.

Afin d'identifier un jeu de paramètres satisfaisant pour l'AF dans notre modèle, plusieurs simulations numériques sur le DIV sont réalisées pour différentes valeurs des paramètres de l'AF en fonction des valeurs fournies. En pratique, afin d'englober les valeurs proposées dans la littérature, les simulations ont été réalisées pour trois valeurs de  $C_{10}$  (0,1 ; 0,5 ; 1 MPa) et  $k_2$  (10 ; 50 ; 200) et deux valeurs pour  $k_1$  (1 ; 5 MPa), soit un total de 18 simulations.

Un chargement en compression est appliqué en suivant la méthodologie détaillée dans la section 3.1.3, à savoir une étape d'initialisation suivie d'une étape de compression. Cette dernière est réalisée en imposant un déplacement axial (descendant) de 1,6 mm du PC supérieur (Eberlein *et al.*, 2001).

Les résultats EF obtenus sont comparés avec les données expérimentales issues de la littérature sur les courbes :

- **force axiale en fonction du déplacement axial**, avec des données expérimentales de Brown *et al.* (1957) et Markolf et Morris (1974), tirées des travaux de Eberlein *et al.* (2001), sur une large gamme de déplacement, et les résultats expérimentaux de Berkson *et al.* (1979) sur une plus petite plage de déplacement,
- **force axiale en fonction du déplacement postéro-latéral**, avec les données expérimentales de Brown *et al.* (1957) et Shah *et al.* (1978) tirées des travaux de Eberlein *et al.* (2001).

Pour chacune de ces courbes, un recalage des données expérimentales a été réalisé afin de construire une courbe de tendance des résultats expérimentaux sur un graphe représentant le **déplacement postéro-latéral en fonction du déplacement axial**.

La Figure 3.10 montre la superposition des résultats EF et expérimentaux pour quelques jeux de paramètres matériau : ( $C_{10} = 0,5$  ;  $k_1 = 1$  ;  $k_2 = 10$ ), ( $C_{10} = 0,5$  ;  $k_1 = 1$  ;  $k_2 = 50$ ), ( $C_{10} = 0,5$  ;  $k_1 = 1$  ;  $k_2 = 200$ ), ( $C_{10} = 0,5$  ;  $k_1 = 5$  ;  $k_2 = 50$ ), ( $C_{10} = 0,1$  ;  $k_1 = 1$  ;  $k_2 = 50$ ), ( $C_{10} = 1$  ;  $k_1 = 1$  ;  $k_2 = 50$ ), avec  $C_{10}$  et  $k_1$  exprimés en MPa. Par souci de lisibilité, afin de ne pas surcharger le graphe, seuls ces six jeux sont représentés, mais ils permettent toutefois d'observer l'influence de chacun des paramètres, les deux autres étant fixés. Globalement, on observe que, pour l'ensemble des paramètres testés, la réponse en force est sous-estimée si l'on observe la Figure 3.10a et surestimée si l'on observe la Figure 3.10b. Une augmentation de chacun des trois paramètres entraîne une augmentation sensible de la force de réaction, et une augmentation de  $C_{10}$  entraîne une augmentation de la pente à l'origine (sur les courbes force vs. déplacement), alors que la tendance donnée par les résultats expérimentaux montre une pente à l'origine assez faible. Par ailleurs, une augmentation de  $k_2$  (avec  $C_{10}$  et  $k_1$  fixés) a tendance à accroître la non-linéarité de la réponse en force, tout en conservant relativement la pente à l'origine. La Figure 3.10c montre que le déplacement postéro-latéral EF calculé est sous-estimé par rapport à l'expérience, mais l'influence des différents paramètres sur la réponse en déplacement postéro-latéral est moins marquée que sur les graphes précédents.

Il est important de préciser que la valeur du déplacement postéro-latéral dépend de la position où il est calculé. La Figure 3.11 montre l'influence de cette position sur le déplacement pour trois points remarquables situés dans le plan transverse du DIV (illustrés sur la Figure 3.11a) pour le jeu de paramètres ( $C_{10} = 0,5$  MPa,  $k_1 = 1$  MPa,  $k_2 = 50$ ). La valeur du déplacement postéro-latéral augmente lorsque l'on se déplace de la position postérieure vers la position latérale. Lorsque le déplacement axial imposé est maximal, la différence

entre les deux points extrêmes est d'environ 0,25 mm. Toutefois, expérimentalement, la position où le déplacement postéro-latéral est mesuré n'est pas donnée. Dans l'ensemble des simulations réalisées, le déplacement postéro-latéral est calculé au niveau du point le plus postérieur (noté  $P_{PL}$  sur la Figure 3.11a).

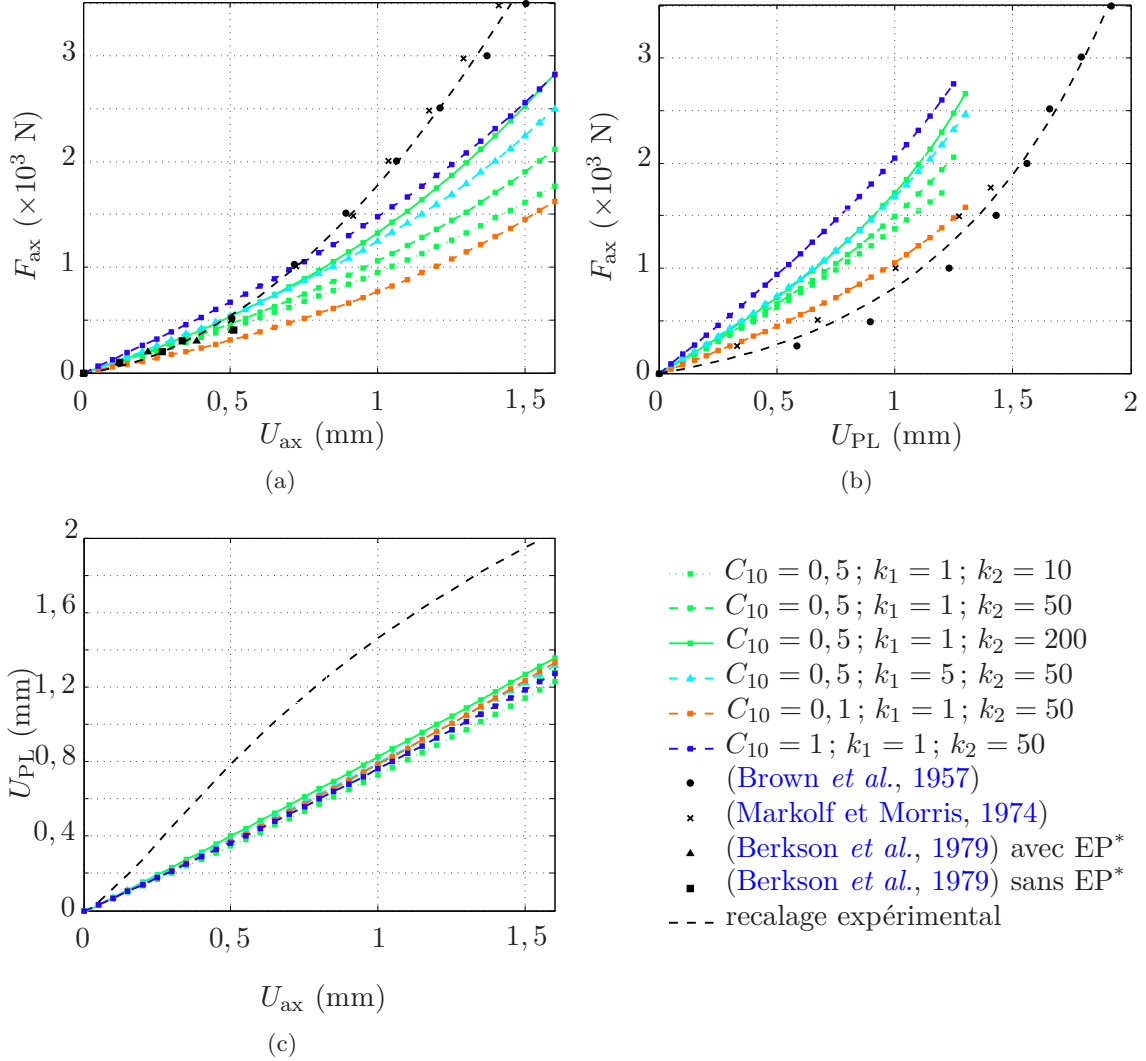


FIGURE 3.10 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux pour quelques jeux de paramètres matériau de l'AF, avec  $C_{10}$  et  $k_1$  exprimés en MPa. (a) Force axiale en fonction du déplacement axial; (b) Force axiale en fonction du déplacement postéro-latéral; (c) Déplacement postéro-latéral en fonction du déplacement axial. Les courbes en pointillés noirs représentent un recalage de l'ensemble des données expérimentales.

Note : \* - Les résultats expérimentaux de (Berkson *et al.*, 1979) ont été réalisés sur deux types de segments vertébraux : des segments vertébraux intacts, c'est-à-dire avec éléments postérieurs (avec EP) et des segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés (sans EP).

Afin de pouvoir choisir le « meilleur » jeu de paramètres ( $C_{10}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ) pour l'AF, un « critère de distance » entre les résultats EF et les tendances expérimentales pour les

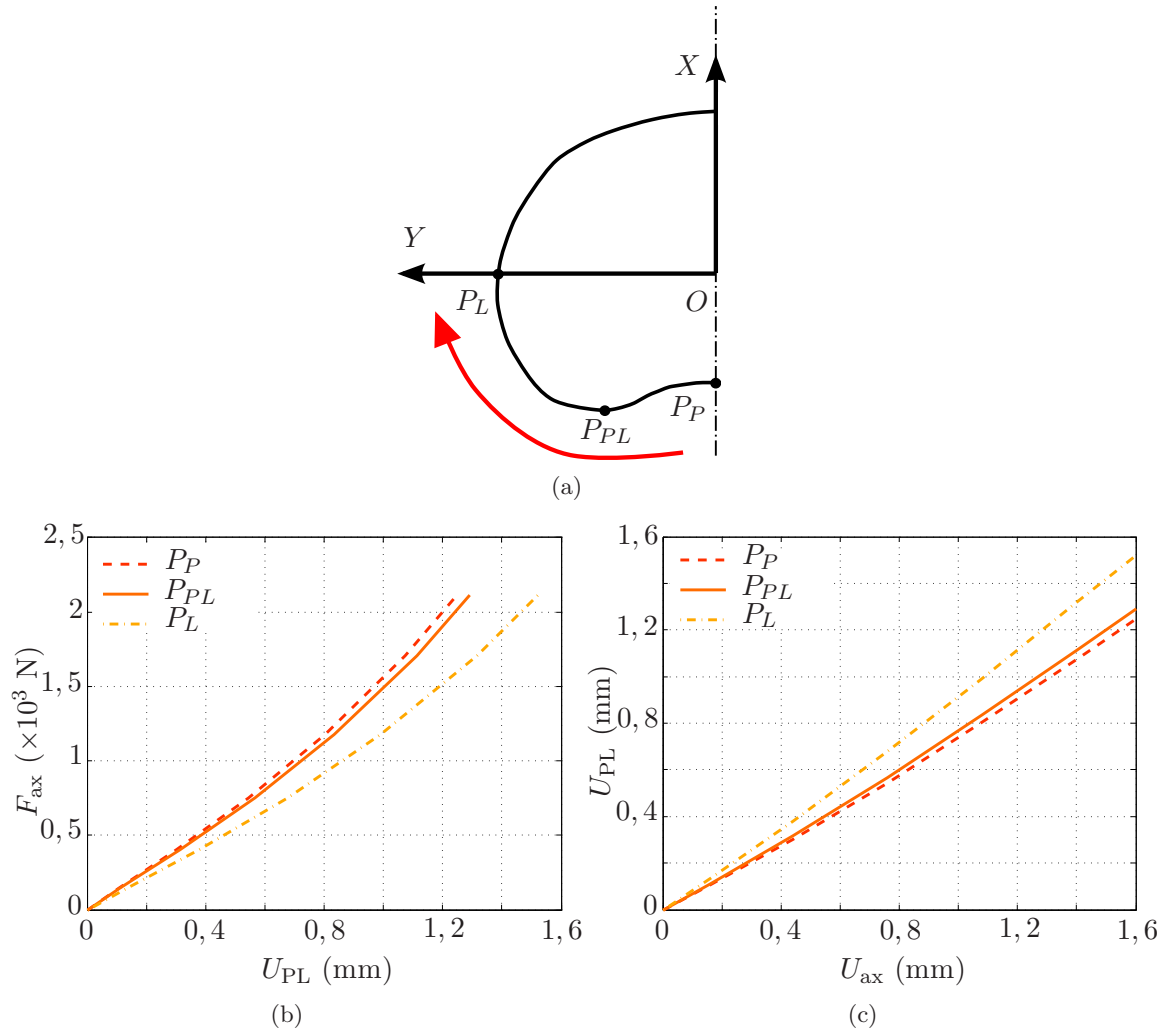


FIGURE 3.11 – Influence de la position du point de calcul sur le déplacement postéro-latéral. (a) Position des points de calcul :  $P_P$  désigne le point externe de l'AF situé à l'intersection avec le plan sagittal ( $Y = 0$ ),  $P_L$  désigne le point externe de l'AF situé à l'intersection avec le plan frontal ( $X = 0$ ), et  $P_{PL}$  désigne le point le plus postérieur ( $|X|$  est maximal) ; (b) Force axiale en fonction du déplacement postéro-latéral ; (c) Déplacement postéro-latéral en fonction du déplacement axial.

résultats obtenus en force axiale et déplacement postéro-latéral en fonction déplacement axial a été défini. Ce critère de distance, noté  $d$ , est défini comme la somme des distances  $d_{ax}$  et  $d_{PL}$  (entre les résultats EF et expérimentaux) obtenus sur les courbes force vs. déplacement axial et déplacement postéro-latéral vs. déplacement axial respectivement, pondérée par un paramètre  $\alpha$ . Puisque la valeur du déplacement postéro-latéral dépend de la position, il a été choisi d'accorder plus d'importance aux résultats en force axiale vs. déplacement axial, en prenant  $\alpha = 60\%$ . Le critère de distance s'écrit alors :

$$d = \alpha d_{ax} + (1 - \alpha) d_{PL}, \quad (3.7)$$

avec

$$d_{ax} = \sqrt{\sum_i (F_{ax,EF,i} - F_{ax,exp,i})^2 / F_{ax,exp,i}^2}, \quad (3.8)$$

$$d_{PL} = \sqrt{\sum_i (U_{PL,EF,i} - U_{PL,exp,i})^2 / U_{PL,exp,i}^2}, \quad (3.9)$$

où  $F_{ax,EF,i}$  et  $F_{ax,exp,i}$  désignent les valeurs de la force axiale obtenue par EF et de la force expérimentale obtenue au point  $i$ , et  $U_{PL,EF,i}$  et  $U_{PL,exp,i}$  les valeurs du déplacement postéro-latéral EF et expérimental au point  $i$ . Il est à noter que ce critère de distance est calculé au sens des moindres carrés mais pondéré par les valeurs prises par la grandeur de référence (à savoir la grandeur expérimentale) en chaque point, afin de donner une importance relative similaire à chaque point. La Figure 3.12 montre la variation du critère de distance  $d$  en fonction du paramètre  $k_2$ , pour l'ensemble des valeurs prises par les paramètres  $C_{10}$  et  $k_1$ . Le jeu de paramètres qui minimise ce critère, parmi les jeux testés, est finalement :  $C_{10} = 0,1$  MPa,  $k_1 = 1$  MPa et  $k_2 = 200$ .

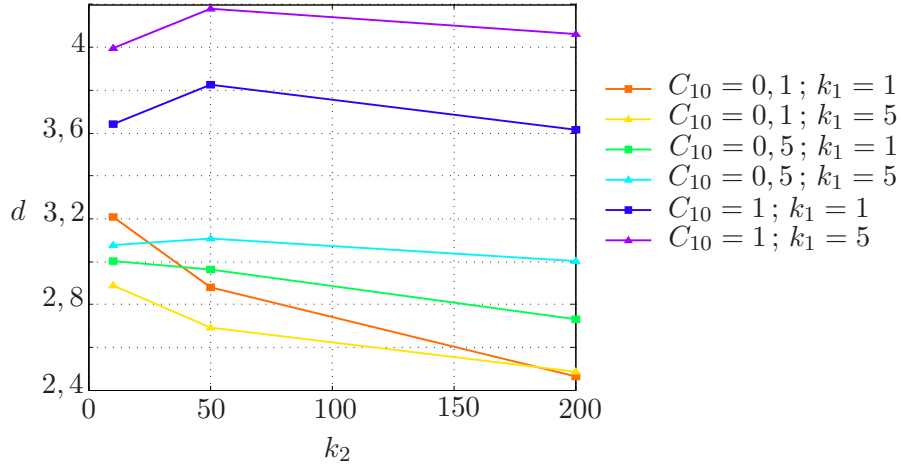


FIGURE 3.12 – Représentation du critère de distance  $d$ , calculé à l'aide des expressions (3.7) et (3.9) sur les courbes force vs. déplacement axial et déplacement postéro-latéral vs. déplacement axial, en fonction de  $k_2$ , pour  $C_{10} = 0,1; 0,5; 1$  MPa et  $k_1 = 1; 5$  MPa.

La Figure 3.13 montre la réponse EF en amplitude du déplacement total obtenue pour ce jeu de paramètres. On note que le déplacement total est maximal au niveau de l'AF postérieur, ce qui est conforme avec ce qui est traditionnellement observé. La Figure 3.14 montre la superposition des résultats EF et expérimentaux sur les graphes de force en fonction du déplacement axial (Figures 3.14a et 3.14b) et du déplacement postéro-latéral (Figure 3.14c).

Le graphe force vs. déplacement axial montre une réponse en force très satisfaisante aux petits déplacements : pour un déplacement imposé de 0,5 mm, la simulation prévoit un effort de réaction d'environ 400 N tandis que l'expérience prévoit environ 450 N, soit une erreur relative d'environ 10 % (Figure 3.14b). Pour les grands déplacements, cependant, on observe une sous-estimation des résultats EF par rapport à l'expérience : pour un



déplacement imposé de 1,5 mm, la simulation prévoit un effort de réaction d'environ 2100 N tandis que l'expérience prévoit environ 3700 N, soit une erreur relative de plus de 40 % (Figure 3.14a). Le graphe force vs. déplacement postéro-latéral (cf Figure 3.14c) montre une légère surestimation des résultats EF par rapport à l'expérience. Lorsque le déplacement axial imposé est de 1,5 mm, ce qui correspond à une force d'environ 2100 N, un déplacement de 1,55 mm est atteint expérimentalement tandis que la simulation prévoit seulement 1,3 mm (erreur relative de 16 %). On peut toutefois rappeler que cet écart entre les résultats EF et l'expérience sur le déplacement postéro-latéral serait réduit en choisissant un point de calcul en position plus latérale.

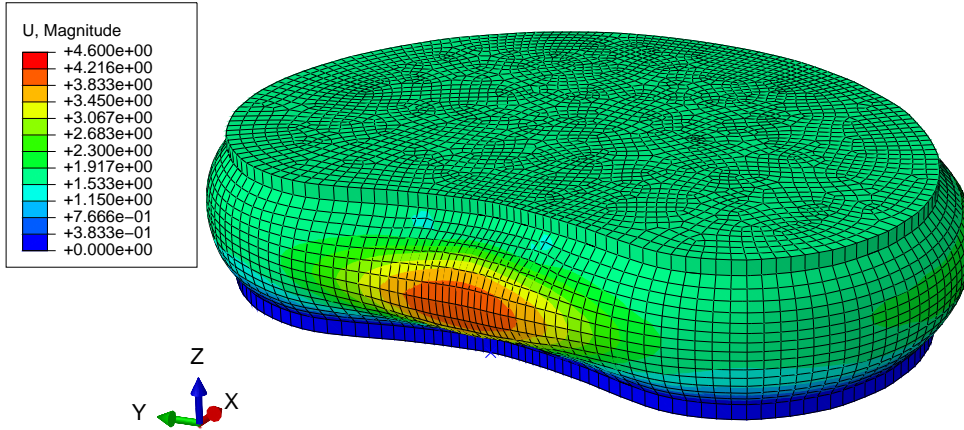


FIGURE 3.13 – Distribution du déplacement total (amplitude) à la suite de l'étape d'initialisation puis de compression du DIV pour le jeu de paramètres retenu ( $C_{10} = 0, 1\text{MPa}$ ;  $k_1 = 1\text{MPa}$ ;  $k_2 = 200$ ).

A notre sens, le jeu de paramètres ( $C_{10} = 0,1\text{ MPa}$ ,  $k_1 = 1\text{ MPa}$ ,  $k_2 = 200$ ) pour l'AF est suffisamment **satisfaisant pour reproduire qualitativement les résultats expérimentaux obtenus en compression**. Ce jeu de paramètres pour l'AF sera conservé dans toute la suite. De plus, compte tenu de la complexité du modèle, ces premiers résultats sont très encourageants et permettent d'espérer une bonne représentation du comportement du DIV sous d'autres cas de chargement peut-être plus discriminants.

**Remarque - Utilité d'une boucle d'optimisation.** La réalisation d'une boucle d'optimisation sur les paramètres de l'AF permettrait de minimiser l'écart entre la simulation et les expériences et de déterminer un jeu de paramètres plus précis. Cependant, une telle démarche est très coûteuse en temps de calcul. Compte tenu du fait que l'AF n'est pas le matériau central de cette étude, l'accent n'a pas été mis sur un recalage précis de ses paramètres et le jeu de paramètres retenu nous paraît suffisamment correct. Rappelons, en outre, que les valeurs des paramètres prises dans la littérature présentent une très grande dispersion.

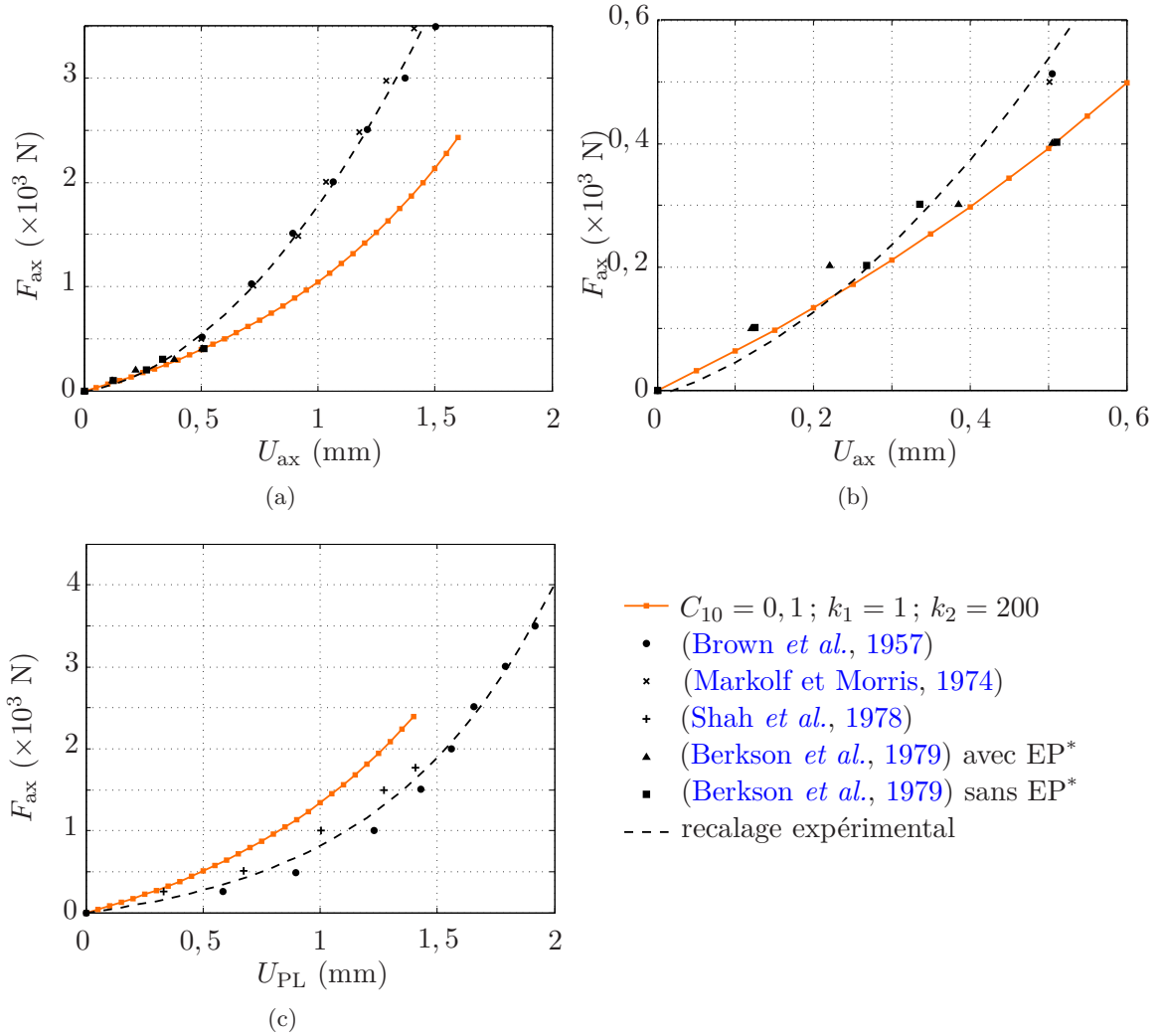


FIGURE 3.14 – Comparaison des résultats EF et des données expérimentales sur un essai en compression pour  $C_{10} = 0,1$  MPa,  $k_1 = 1$  MPa et  $k_2 = 200$ . (a) Force axiale en fonction du déplacement axial; (b) Force axiale en fonction du déplacement axial avec zoom sur les petits déplacements; (c) Force axiale en fonction du déplacement postéro-latéral. Les courbes en pointillés noirs représentent la tendance exprimée par l'ensemble des données expérimentales.

Note : \* - Les résultats expérimentaux de (Berkson *et al.*, 1979) ont été réalisés sur deux types de segments vertébraux : des segments vertébraux intacts, c'est-à-dire avec éléments postérieurs (avec EP) et des segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés (sans EP).

### 3.2.2 Influence du noyau central sur la réponse en compression du DIV

La compression est le mode de chargement de base auquel le DIV est soumis quotidiennement. Dans le but d'envisager le remplacement du NP dégradé par un hydrogel, l'étude de l'influence des paramètres matériau d'entrée du « noyau central » sur la réponse globale du DIV présente un fort intérêt.

Les paramètres matériau de l'AF étant fixés ( $C_{10} = 0,1$  MPa,  $k_1 = 1$  MPa,  $k_2 = 200$ ), une **étude de sensibilité du comportement du DIV en compression selon les paramètres d'entrée du noyau central** ( $C_0^*$ ,  $\chi$  et  $\phi_{f,0}$ ) est réalisée. Pour cela, trois valeurs pour chacun des trois paramètres ont été sélectionnées dans une gamme de valeurs assez large (cf discussion en fin de paragraphe 3.1.4.2).

- pour la raideur, à travers le module de cisaillement dans l'état de référence, les valeurs sélectionnées sont  $C_0^* = 0,05 ; 0,5 ; 5$  MPa ;
- pour le paramètre d'interaction, on choisit  $\chi = 0,1 ; 0,3 ; 0,5$  ;
- pour la fraction volumique d'eau dans l'état de référence, on choisit  $\phi_{f,0} = 80, 90$  et  $95$  %.

Les calculs EF sont réalisés pour l'ensemble des combinaisons entre les trois paramètres, ce qui représente un total de  $3^3 = 27$  simulations. Le chargement imposé est un déplacement vertical du PC supérieur égal à  $1,5$  mm.

Les Figures 3.15, 3.16 et 3.17 présentent les effets des variations de  $C_0^*$ ,  $\chi$  et  $\phi_{f,0}$  respectivement sur le comportement en compression du DIV (courbes force axiale vs. déplacement axial). La Figure 3.18 montre la force maximale atteinte lorsque le déplacement imposé est maximal ( $1,5$  mm) en fonction de  $C_0^*$  et  $\chi$  selon l'état d'hydratation initial (représenté par la variable  $\phi_{f,0}$ ).

D'après la Figure 3.15, on observe qu'une augmentation de  $\phi_{f,0}$  (c'est-à-dire une augmentation de la teneur initiale en eau) ainsi qu'une augmentation de  $\chi$  (c'est-à-dire une diminution de l'affinité chimique du matériau avec l'eau, ou une perte d'hydrophilie) entraînent une diminution de la raideur globale du DIV. Une augmentation de  $C_0^*$  (c'est-à-dire une augmentation de la raideur du noyau) entraîne une augmentation de la raideur globale de la structure. De plus, on observe que l'influence de  $C_0^*$  sur la réponse mécanique du DIV est quasi négligeable lorsque  $\chi = 0,1$  et  $\phi_{f,0} = 80\%$  ; au contraire, l'influence de  $C_0^*$  sur la réponse mécanique est d'autant plus importante que  $\chi$  et  $\phi_{f,0}$  sont importants. Autrement dit, moins le matériau est hydrophile (i.e. son affinité avec l'eau est faible) et plus il est hydraté initialement, plus la raideur du noyau joue un rôle dans la réponse mécanique globale du DIV.

La Figure 3.16 montre également qu'une augmentation de  $\phi_{f,0}$  (c'est-à-dire une augmentation de la teneur initiale en eau) entraîne une diminution de la raideur globale du DIV. Globalement, une augmentation de  $\chi$  (c'est-à-dire une diminution de l'affinité avec l'eau) tend à faire diminuer la raideur de la structure. De plus, on observe que l'influence de  $\chi$  sur la réponse mécanique globale du DIV est négligeable lorsque  $C_0^* = 0,5$  ou  $5$  MPa et  $\phi_{f,0} = 95\%$  ; au contraire, l'influence de  $\chi$  est d'autant plus importante que  $C_0^*$  et  $\phi_{f,0}$  sont faibles. Autrement dit, moins le matériau est raide et moins il contient d'eau initialement, plus l'affinité chimique entre polymère et eau a un rôle important dans le comportement mécanique du DIV.

La Figure 3.17 montre, à nouveau, qu’une augmentation de  $\chi$  (c’est-à-dire une perte d’hydrophilie) entraîne une diminution de la raideur globale du DIV, et qu’une augmentation de  $\phi_{f,0}$  (c’est-à-dire une augmentation de la teneur initiale en eau) entraîne une diminution de la raideur globale du DIV. De plus, on observe que l’influence de  $\phi_{f,0}$  sur la réponse mécanique globale du DIV est faible lorsque  $C_0^* = 5$  MPa et  $\chi = 0,5$ ; au contraire, l’influence de  $\phi_{f,0}$  est d’autant plus importante que  $C_0^*$  et  $\phi_{f,0}$  sont faibles. Autrement dit, plus le matériau est mou et plus son affinité avec l’eau est grande, plus le taux d’hydratation initial a un rôle important dans le comportement mécanique du DIV.

La Figure 3.18 propose une synthèse des observations effectuées ci-avant. Elle permet de confirmer, d’une part, que la raideur globale est moins importante lorsque la teneur initiale en eau est plus élevée. De plus, lorsque le noyau est très hydraté ( $\phi_{f,0} = 95\%$ ),  $\chi$  n’a pas d’influence sur la raideur de la structure, quelle que soit la valeur de  $C_0^*$ , c’est-à-dire que la raideur du DIV n’est pas pilotée par l’affinité chimique lorsque la teneur initiale en fluide est importante. Par ailleurs, une valeur de  $C_0^*$  faible ( $< 0,5$ MPa) n’a pas d’effet notable sur la raideur du DIV, quels que soient  $\chi$  et  $\phi_{f,0}$  : lorsque la raideur du noyau est trop faible, la réponse mécanique du DIV ne dépend pas de celle-ci. Enfin, lorsque  $\phi_{f,0} = 80\%$  et  $\chi = 0,1$ ,  $C_0^*$  n’a pas d’influence, i.e. lorsque la teneur en eau initiale est moins importante et que le matériau est très hydrophile, la raideur du noyau central n’intervient pas dans la réponse mécanique du DIV. Le Tableau 3.4 résume brièvement l’ensemble de ces observations.

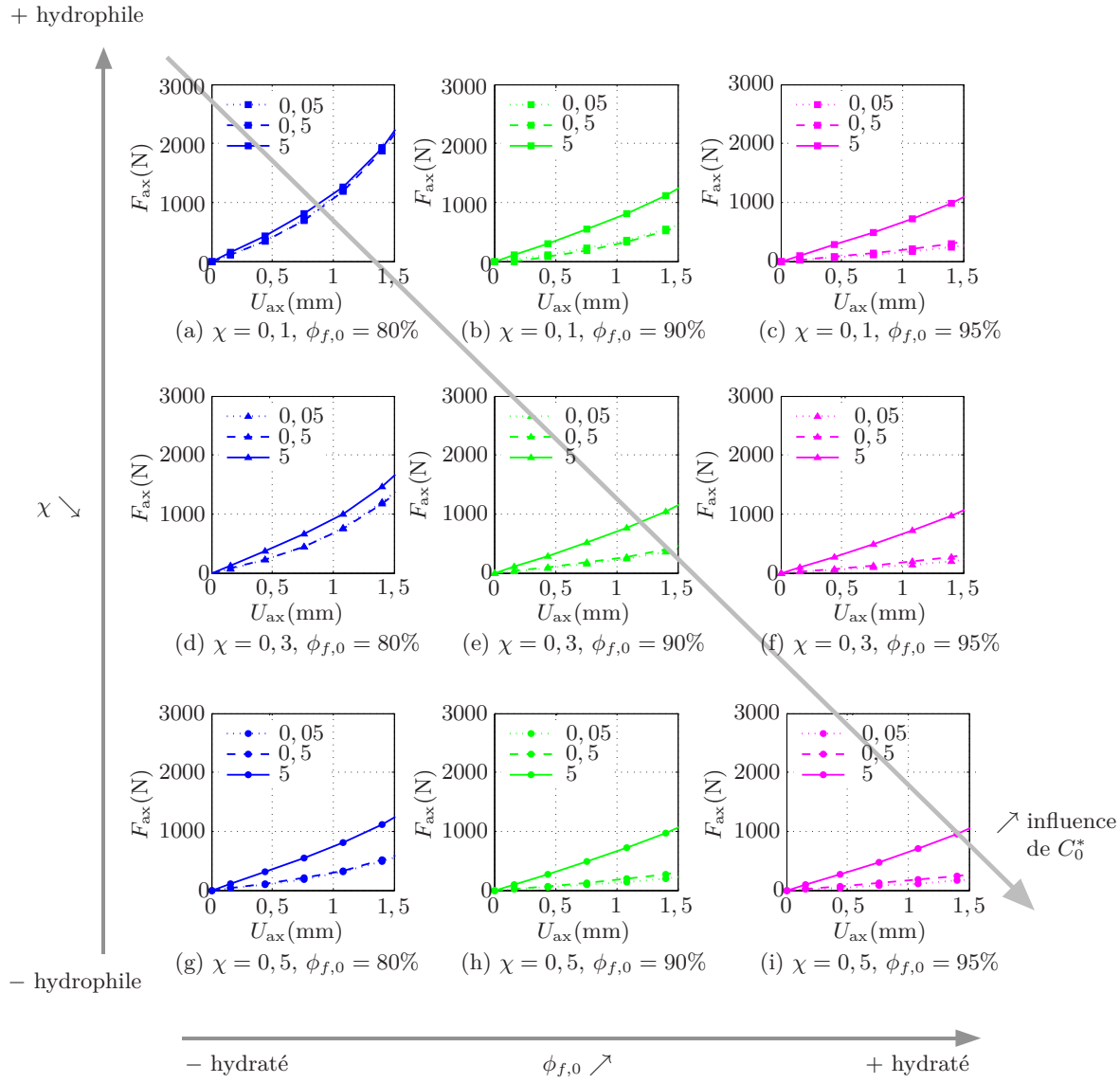


FIGURE 3.15 – Influence du module de cisaillement  $C_0^*$  sur le comportement en compression du DIV : pour chaque sous-figure, les courbes force axiale vs. déplacement axial sont représentées pour  $C_0^* = 0,05 ; 0,5 ; 5$  MPa, à  $\chi$  et  $\phi_{f,0}$  fixés.

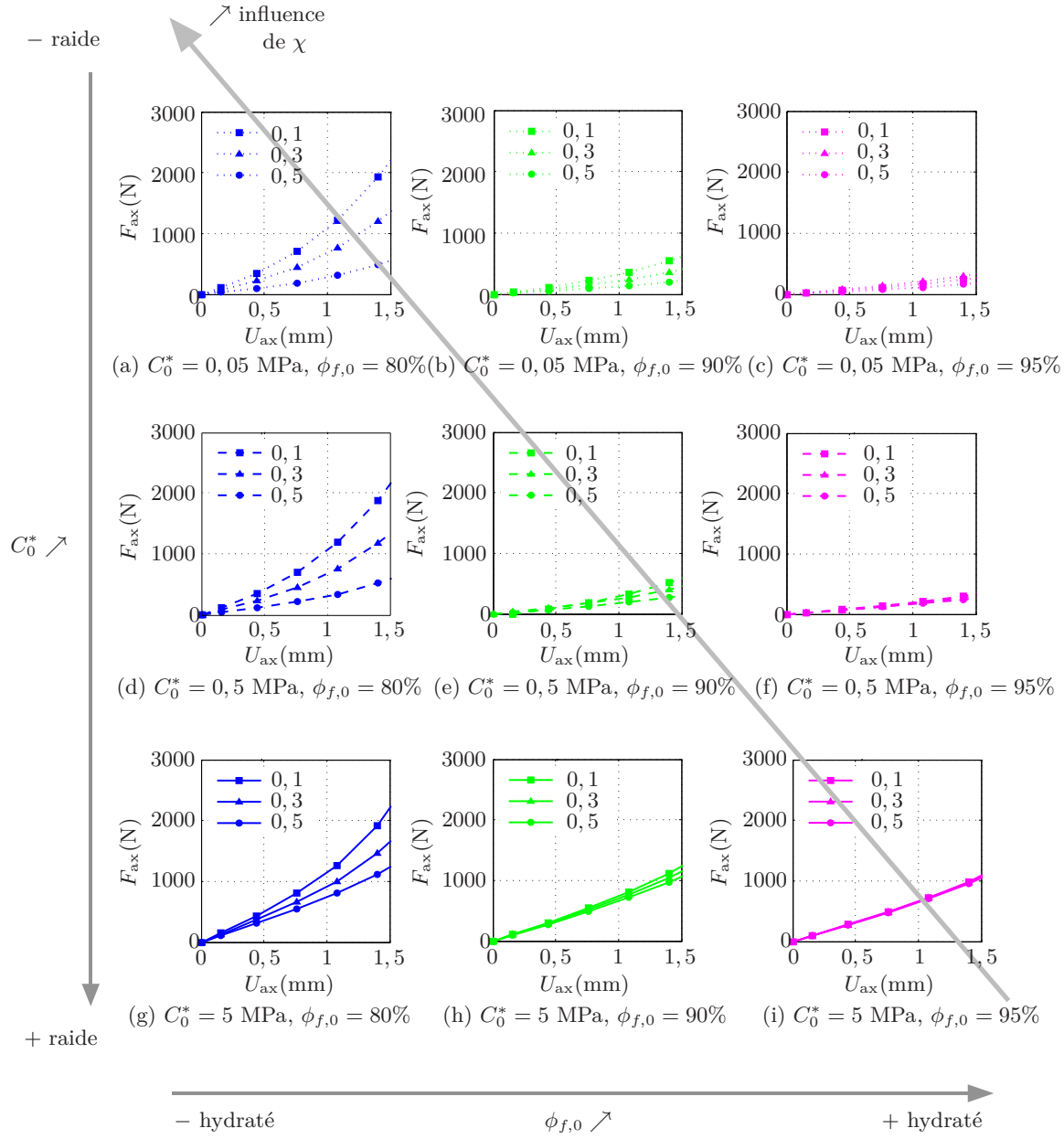


FIGURE 3.16 – Influence du paramètre d'interaction avec l'eau  $\chi$  sur le comportement en compression du DIV : pour chaque sous-figure, les courbes force axiale vs. déplacement axial sont représentées pour  $\chi = 0,1; 0,3; 0,5$ , à  $C_0^*$  et  $\phi_{f,0}$  fixés.

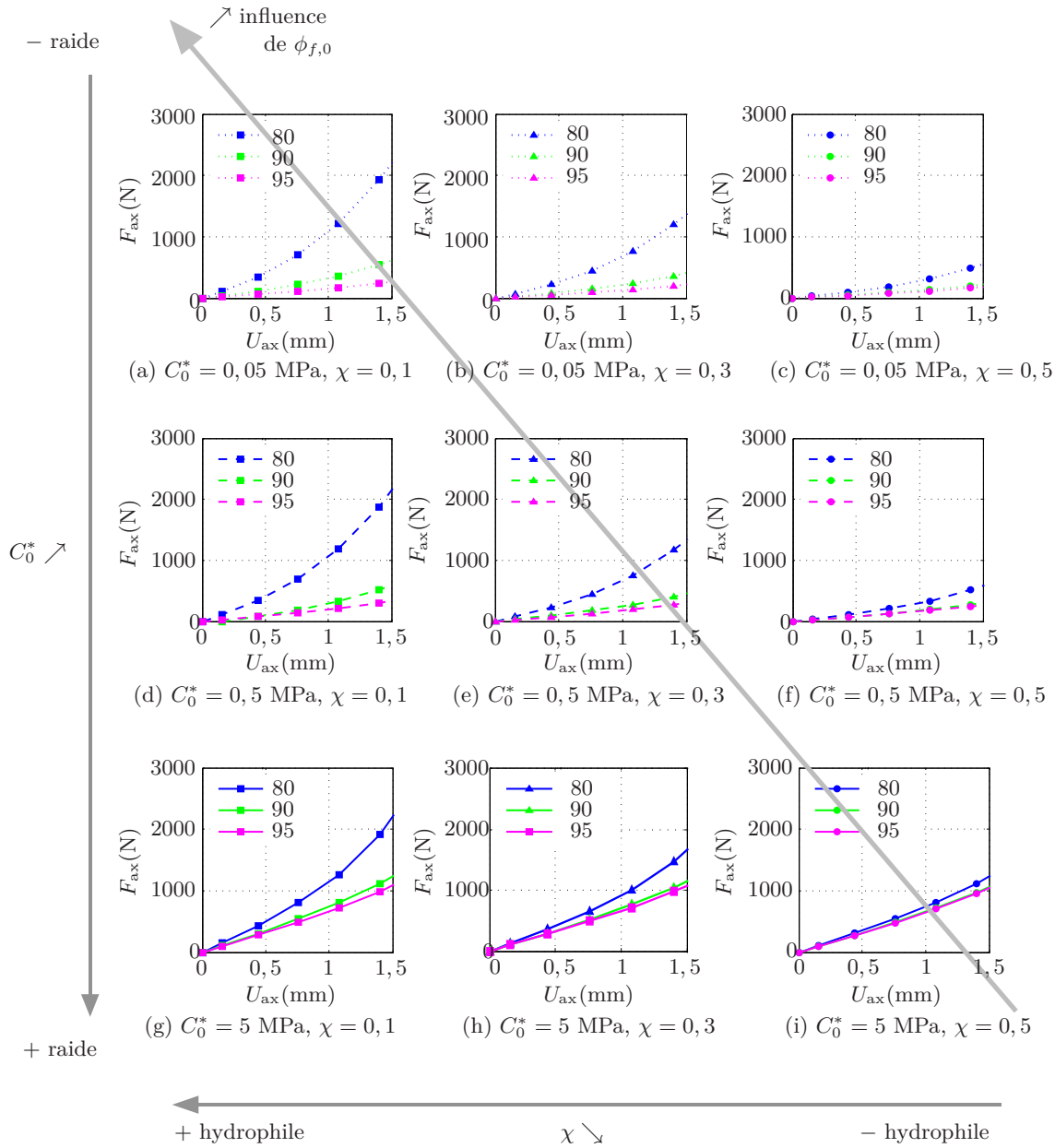


FIGURE 3.17 – Influence de la fraction volumique initiale de fluide  $\phi_{0,f}$  sur le comportement en compression du DIV : pour chaque sous-figure, les courbes force axiale vs. déplacement axial sont représentées pour  $\phi_{f,0} = 80, 90$  et  $95\%$ , à  $C_0^*$  et  $\chi$  fixés.

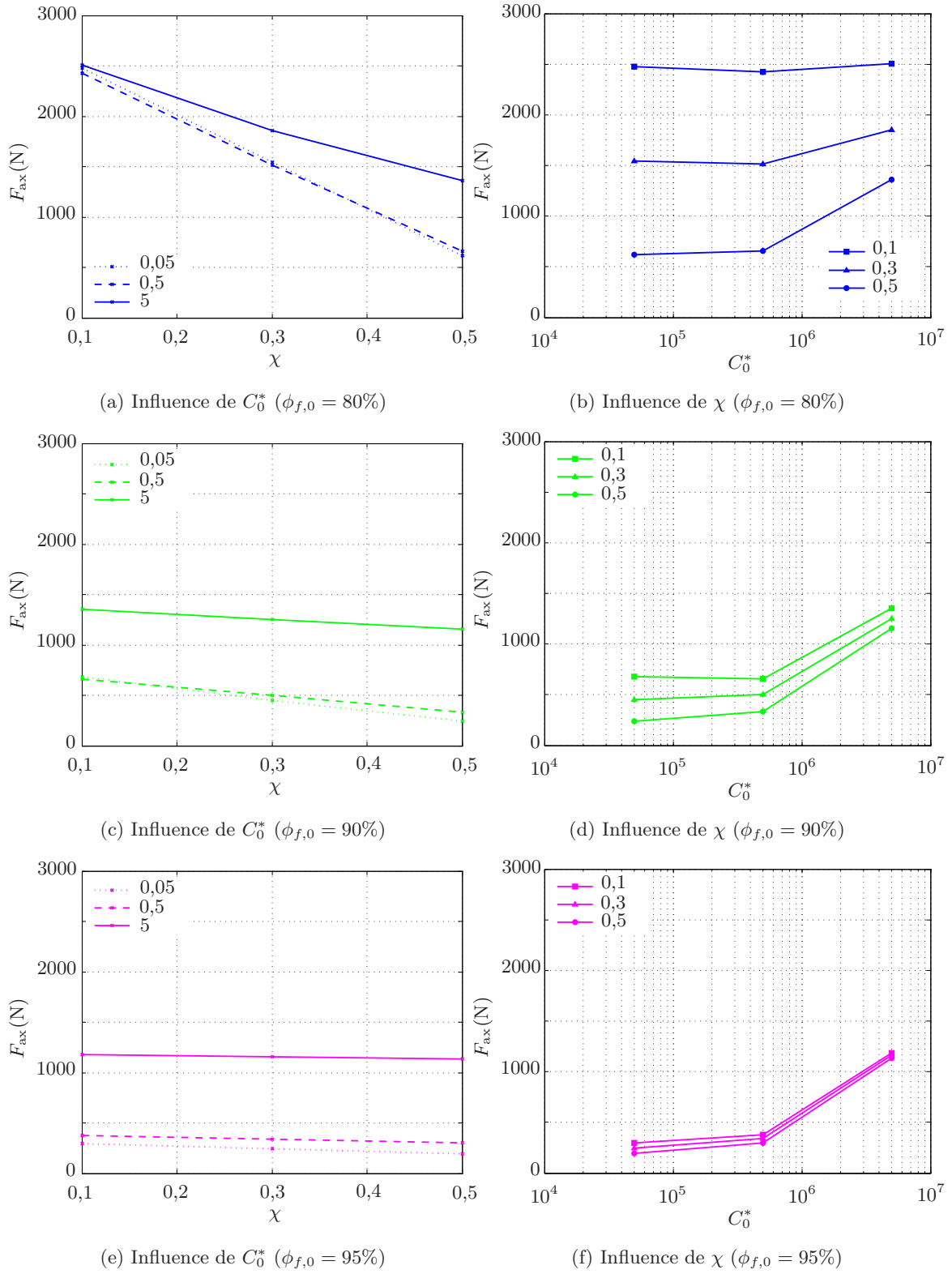


FIGURE 3.18 – Influence de  $C_0^*$  et  $\chi$  sur la réponse en force atteinte pour un déplacement imposé de 1,5 mm selon l'état d'hydratation initial  $\phi_{f,0}$ .



Caractéristique			Paramètre influent
hydraté	hydrophile	raide	
+	−		$C_0^*$
−		−	$\chi$
	+	−	$\phi_{f,0}$

TABLEAU 3.4 – Influence des paramètres d’entrée du « noyau central » (NP ou hydrogel de remplacement) selon ses caractéristiques sur la réponse mécanique du DIV.

Finalement, dans le cas d’un NP sain (taux d’hydratation autour de 80 %), la raideur a un rôle négligeable dans la réponse mécanique du DIV en compression, si le NP est très hydrophile. Dans le cas d’un hydrogel de remplacement, dont la teneur initiale en fluide est supérieure à 95 %, l’affinité chimique entre le polymère et l’eau n’a pas d’influence sur la réponse mécanique du DIV. De même, en-dessous d’une certaine valeur ( $C_0^* = 0,5$  MPa), la raideur du noyau a un effet négligeable sur la réponse mécanique globale du DIV, qui sera alors entièrement dictée par l’AF. Dans tous les cas, plus l’hydratation dans l’état de référence est importante, plus le DIV est souple.

### 3.2.3 Bilan

Dans cette section, la réponse mécanique d’un DIV sain en compression a été étudiée. Dans un premier temps, les paramètres matériau de l’AF ont été identifiés en comparant l’effort et le déplacement postéro-latéral (à déplacement vertical imposé) avec des données expérimentales issues de la littérature. Moyennant le fait qu’il est nécessaire de formuler des hypothèses pour traduire les conditions d’expérience (par exemple la position où l’on extrait le déplacement postéro-latéral), **le modèle ainsi construit est qualitativement satisfaisant puisqu’il permet de reproduire les tendances expérimentales en compression.**

Dans un second temps, dans le but d’envisager le remplacement du NP dégradé par un matériau de remplacement de type hydrogel, l’influence des paramètres d’entrée du « noyau central » a été examinée. Selon les caractéristiques du noyau (sa raideur, son caractère hydrophile, ou son taux d’hydratation dans l’état de référence), les paramètres qui influent fortement sur la réponse mécanique globale du DIV ont été mis en évidence. On peut ainsi en tirer quelques premières conclusions sur les propriétés que doit avoir un hydrogel de substitution afin de remplir un rôle dans le comportement mécanique du DIV : **si la valeur de l’affinité chimique entre le polymère de base formant l’hydrogel et l’eau n’est pas déterminante, il faudra envisager d’augmenter la raideur de l’hydrogel afin que le noyau puisse jouer un rôle dans la réponse mécanique du DIV en compression,** et ainsi « soulager » l’AF de toutes les charges compressives.

La section suivante propose une étude de la réponse mécanique d’un DIV sain soumis à de multiples cas de chargement.

### 3.3 Etude de la réponse mécanique du DIV dans d'autres cas de chargement

L'ensemble des paramètres matériau étant fixés ( $C_{10} = 0,1$  MPa,  $k_1 = 1$  MPa,  $k_2 = 200$  pour l'AF, et  $C_0^* = 0,5$  MPa,  $\chi = 0,1$  et  $\phi_{f,0} = 80\%$  pour le NP), le modèle de DIV sain est à présent soumis à de multiples cas de chargement, en suivant le protocole détaillé dans la section 3.1.3. L'objectif est de confronter le modèle aux données expérimentales afin de discuter de sa capacité à reproduire les comportements observés.

Dans cette section, quelques généralités sur la méthodologie employée sont tout d'abord présentées (conditions aux limites imposées au modèle en lien avec les conditions d'expérience, résultats observés), puis les résultats obtenus sous les différents cas de chargement sont présentés. Une discussion sur les performances du modèle est finalement proposée.

#### 3.3.1 Méthodologie

##### 3.3.1.1 Cas d'étude

En munissant le DIV d'un repère orthonormé direct  $(O, X, Y, Z)$  où  $O$  est le centre du DIV,  $(X, Y)$  est le plan transverse (cf section 3.1.1) et  $Z$  est le vecteur normal, on note  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  le déplacement suivant les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement, et  $U_{R,1}$ ,  $U_{R,2}$  et  $U_{R,3}$  le déplacement angulaire autour des axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement, comme cela est illustré sur la Figure 3.19. La flexion et l'extension sont définies comme la rotation autour de l'axe  $\pm Y$ , l'inclinaison latérale correspond à une rotation autour de l'axe  $X$ , la torsion correspond à la rotation autour de l'axe  $Z$ , la compression correspond à la translation suivant  $-Z$ , les cisaillements antérieur et postérieur correspondent à la translation suivant  $\pm X$  et le cisaillement latéral correspond à la translation suivant  $Y$ . Les amplitudes des différentes sollicitations appliquées sont rapportées dans le tableau 3.5. Elles sont de l'ordre de grandeur des mouvements physiologiques qui peuvent être endurés par le DIV.

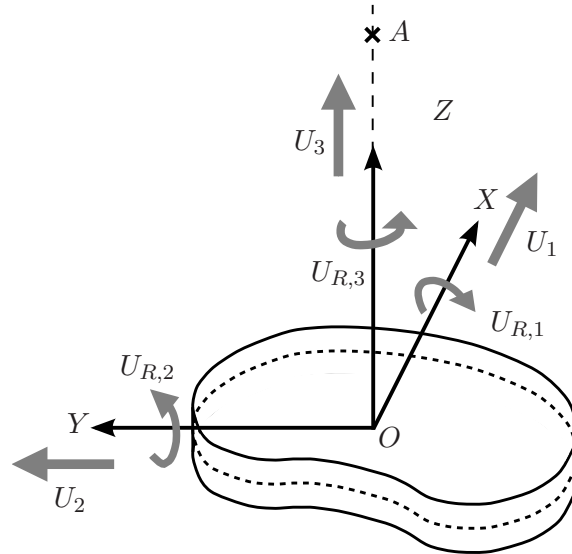


FIGURE 3.19 – Définition des translations  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  et des rotations  $U_{R,1}$ ,  $U_{R,2}$  et  $U_{R,3}$  dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  associé au DIV. Le point  $A$  représente le point d'application des sollicitations.

Sollicitation	Amplitude
Flexion	7°
Extension	5°
Inclinaison latérale	6°
Torsion	4°
Compression	1,6 mm
Cisaillement antérieur	2 mm
Cisaillement postérieur	2 mm
Cisaillement latéral	2 mm

TABLEAU 3.5 – Chargements et amplitudes des mouvements appliqués dans les simulations EF.

### 3.3.1.2 Passage de l'expérience au modèle

**Conditions aux limites.** Nachemson et son groupe de travail ([Schultz et al., 1979](#) ; [Berkson et al., 1979](#)) ont effectué des essais sur 42 DIV lombaires sous les types de chargement énoncés précédemment. Ainsi, les conditions d'expérience sont identiques pour l'ensemble des sollicitations considérées, ce qui facilite la mise en œuvre numérique. Toutefois, le montage expérimental mis en place est relativement complexe : les deux vertèbres adjacentes au DIV observé sont encastrées dans des systèmes de fixation rigides, le système de fixation inférieur est fixé sur le bâti de la machine, tandis que les sollicitations sont appliquées sur le système de fixation supérieur par le biais de poids et d'un système fils/poulies agissant sur deux bras disposés en croix. Ces deux bras sont placés à une distance d'environ 34 mm du centre du DIV. La Figure 3.20 présente une photographie de ce montage expérimental. En outre, les essais expérimentaux ont été réalisés sur deux types de segments vertébraux : d'une part sur des segments vertébraux intacts ; d'autre part sur des segment vertébraux dont les éléments postérieurs (articulations facettaires, ligaments) ont été ôtés (cf Figure 1.2 pour un rappel du vocabulaire).

Afin de se rapprocher au mieux de ces conditions, le point A de coordonnées (0, 0, 34 mm) (voir Figure 3.19) est considéré comme le point d'application des sollicitations dans le modèle numérique. Par ailleurs, comme il est difficile de reproduire numériquement les conditions expérimentales, deux cas de chargement ont été simulés :

- un cas de **chargement en sollicitation pure**, c'est-à-dire en imposant un seul degré de liberté (en translation ou en rotation), en laissant libres les cinq autres degrés de liberté (ce qui entraîne l'apparition de mouvement couplés, comme on le verra),
- un cas de **chargement en sollicitation simple**, c'est-à-dire en imposant un degré de liberté (en translation ou en rotation), en fixant les cinq autres nuls.

La Figure 3.21 illustre ces deux types de sollicitations sur une géométrie cylindrique simple. Ces deux cas de sollicitation représentent les cas les plus extrêmes en termes de conditions aux limites. En effet, le cas de chargement en sollicitation pure représente le chargement qui s'appliquerait sur un DIV sans éléments postérieurs si le montage expérimental était idéal (ce qui n'est pas le cas), tandis que le cas de chargement en sollicitation simple

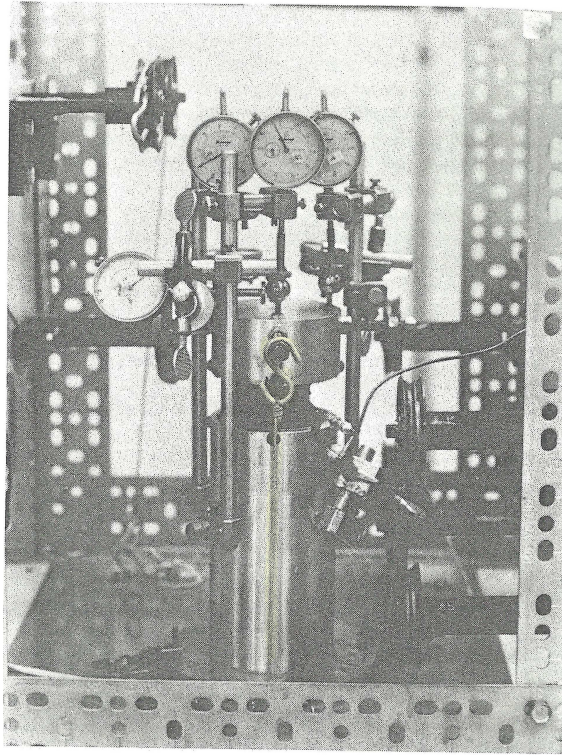


FIGURE 3.20 – Photographie du montage expérimental utilisé par [Schultz et al. \(1979\)](#) et [Berkson et al. \(1979\)](#). Le DIV est situé entre les deux cylindres de fixation. Les comparateurs, servant à mesurer les différents déplacements de la surface supérieure du système de fixation supérieur, sont clairement visibles. Les bras, sur lesquels sont appliqués les sollicitations, sont attachés au système de fixation cylindrique supérieur. Les fils et poulies sont également visibles. Photographie tirée de [Schultz et al. \(1979\)](#).

cumule les contraintes issues du montage expérimental et de la présence des éléments postérieurs qui rigidifient la structure. On s'attend *a priori* à ce que la réponse obtenue par simulation numérique pour les deux cas de sollicitations encadre la réponse obtenue expérimentalement.

**Grandeurs de sortie.** Le montage expérimental de [Schultz et al. \(1979\)](#) et [Berkson et al. \(1979\)](#) leur permet d'imposer des efforts ou des moments, via des séries de poids appliqués selon certaines directions. A chaque incrément de chargement sont mesurées :

- les six composantes du déplacement du centre géométrique du corps vertébral supérieur par rapport au corps vertébral inférieur fixe, à l'aide de six comparateurs placés sur la surface supérieure du système de fixation,
- la pression intradiscale, à l'aide d'une aiguille (munie d'une membrane instrumentée) insérée au centre du disque.

Numériquement, les déplacements (respectivement angles) sont imposés au niveau du point de coordonnées (0,0,34 mm) dont la cinématique est couplée avec le PC supérieur rigide, et les forces (respectivement moments) sont extraits au même point. La pression intradiscale est extraite au niveau d'un nœud du maillage situé au centre du NP.

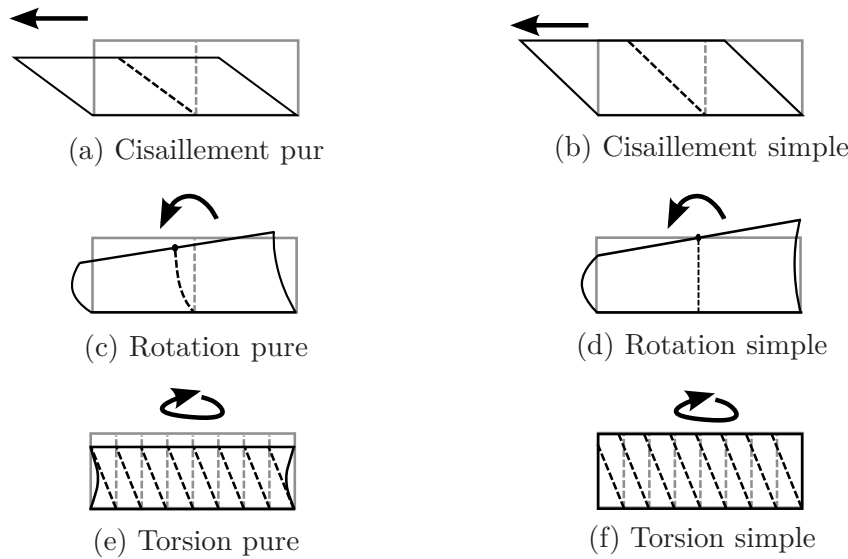


FIGURE 3.21 – Illustration des différents modes de chargement qui seront simulés. La géométrie non déformée est représentée en gris, la géométrie déformée en noir.

**Utilisation des résultats expérimentaux relatifs aux segments vertébraux intacts, lors de l'étude des mouvements couplés.** Expérimentalement, deux types de segments vertébraux ont été étudiés par le groupe de Nachemson : des segments vertébraux intacts et des segments vertébraux dont les éléments postérieurs ont été ôtés. Les résultats EF obtenus avec notre modèle, constitué du DIV et de ses PC seulement, sont donc directement comparables aux résultats expérimentaux de la deuxième catégorie (sans éléments postérieurs). *A contrario*, les résultats EF obtenus avec notre modèle ne sont pas directement comparables avec les résultats expérimentaux de la première catégorie (segments vertébraux intacts). Pour autant, afin d'utiliser les résultats expérimentaux relatifs aux segments vertébraux intacts lors de l'observation des mouvements couplés, nous nous sommes placés à même niveau de déplacement imposé (en translation ou en rotation) dans la simulation que le niveau de déplacement observé expérimentalement, et les valeurs des déplacements couplés ont été relevées et ainsi comparées. La Figure 3.22 résume de façon schématique la démarche effectuée, sur l'exemple d'un chargement en cisaillement antérieur.

### 3.3.1.3 Forme des résultats présentés

Les résultats EF sont comparés avec des données expérimentales de [Schultz et al. \(1979\)](#) pour les tests en flexion, extension, inclinaison latérale et torsion, et de [Berkson et al. \(1979\)](#) pour les tests en compression et cisaillements antérieur, postérieur et latéral. Pour chacun des chargements considérés, les résultats suivants seront présentés :

- **l'allure de la déformée** pour les deux types de sollicitation (pure et simple),
- **l'amplitude du mouvement**, i.e. la courbe de la force en fonction du déplacement imposé ou du moment en fonction de l'angle de rotation imposé, ainsi que **la variation de pression**, i.e. la courbe représentant la variation de pression dans le NP en fonction du déplacement ou de l'angle de rotation imposé,
- dans le cas d'un chargement en sollicitation pure, **l'évolution des mouvements**

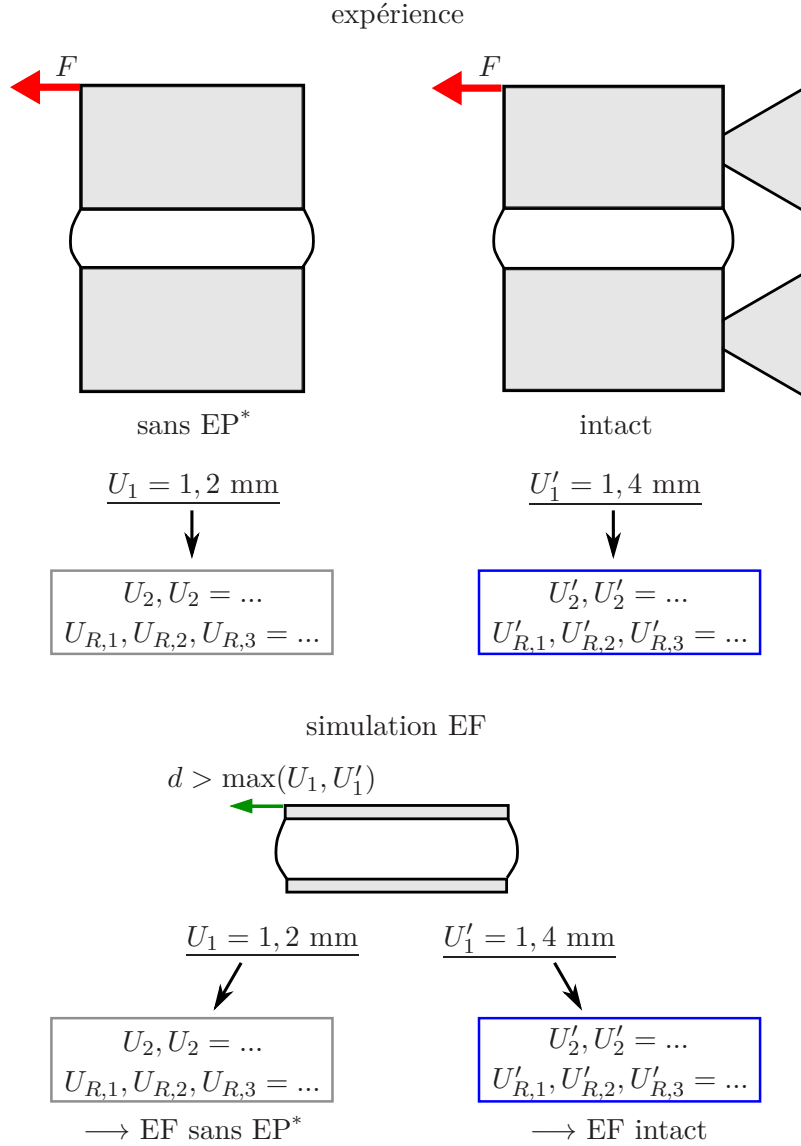


FIGURE 3.22 – Schéma représentant la démarche mise en place afin de pouvoir comparer les résultats EF à l'ensemble des données expérimentales obtenues par [Berkson \*et al.\* \(1979\)](#) et [Schultz \*et al.\* \(1979\)](#), lors de l'étude des mouvements couplés (exemple du cisaillement antérieur). Expérimentalement, l'effort  $F$  est imposé, et les déplacements principaux  $U_1$  et  $U'_1$  (dans l'exemple,  $U_1 = 1,2 \text{ mm}$  et  $U'_1 = 1,4 \text{ mm}$ ) ainsi que l'ensemble des déplacements couplés sont relevés pour les segments vertébraux sans éléments postérieurs et les segments vertébraux intacts respectivement. Dans la simulation, sur un même cas de calcul, un déplacement  $d > \max(U_1, U'_1)$  est imposé, et les déplacements couplés sont relevés pour  $U_1$  et  $U'_1$ . Les résultats encadrés en bleu seront comparés entre eux pour les segments vertébraux intacts (dans ce cas, par abus de langage, on désignera les résultats obtenus par simulation « EF intact »). De même, les résultats encadrés en gris seront comparés entre eux pour les segments vertébraux sans éléments postérieurs (on parlera d'« EF sans EP » pour la simulation).

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.



**couplés au cours de la sollicitation**, c'est-à-dire l'évolution des cinq autres degrés de liberté (translations et rotations), ainsi que **l'amplitude de ces mouvements couplés** à déplacement ou angle de rotation fixé, en comparaison avec les résultats expérimentaux.

Il est important de noter que les courbes expérimentales représentent la moyenne des valeurs obtenues pour les 42 DIV, ce qui explique leur allure parfois chahutée. Les barres d'erreur expérimentales, lorsqu'elles sont disponibles, sont également représentées sur ces figures dans la mesure où elles rendent compte d'une très grande dispersion des résultats (avec, souvent, un écart-type plus important que la moyenne des résultats) selon les échantillons (âge, sexe, niveau lombaire, degré de dégénérescence, présence ou non des éléments postérieurs).

### 3.3.2 Résultats selon le type de sollicitation

#### 3.3.2.1 Compression

Le maillage déformé, suite à un chargement en compression, est illustré sur la Figure 3.23 pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.23a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.23b). Le point d'application du chargement est également représenté. L'allure de la déformée est similaire dans les deux cas.

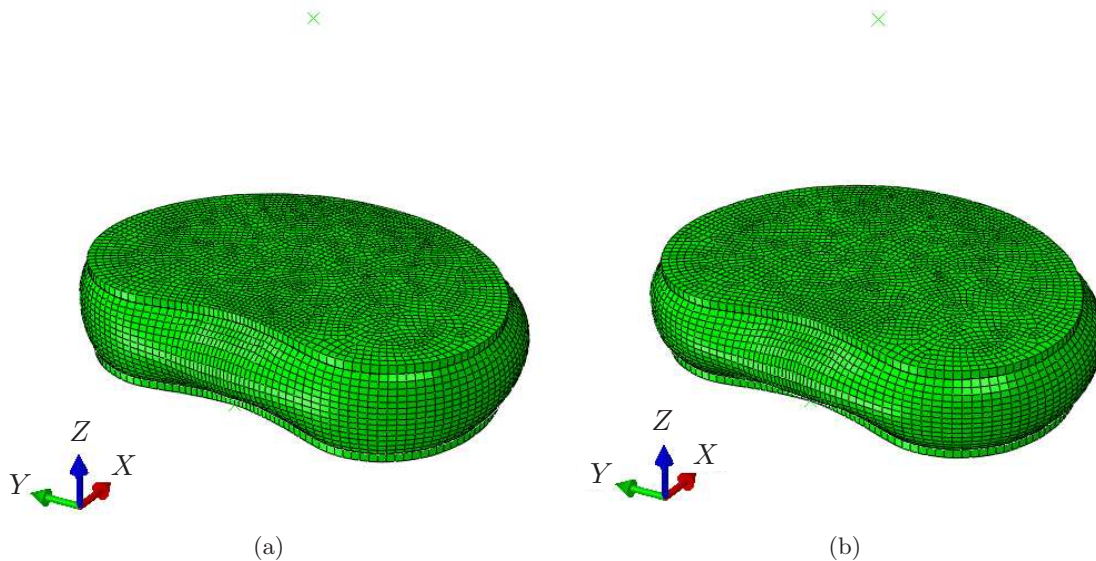


FIGURE 3.23 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en compression : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.24 présente la comparaison entre les résultats EF obtenus en sollicitation simple et en sollicitation pure et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression au centre du NP en fonction du déplacement, pour un chargement en compression. On observe que la réponse du modèle (aussi bien en force qu'en variation de pression) varie peu selon le type de sollicitation imposé. Comme on pouvait s'y attendre, la réponse en force du modèle coïncide parfaitement avec les résultats expérimentaux (Figure 3.24a), dans la mesure où les paramètres matériau ont été

identifiés sur l'essai en compression. Le modèle prévoit également une augmentation de pression en fonction du déplacement conforme aux observations expérimentales (Figure 3.24b).

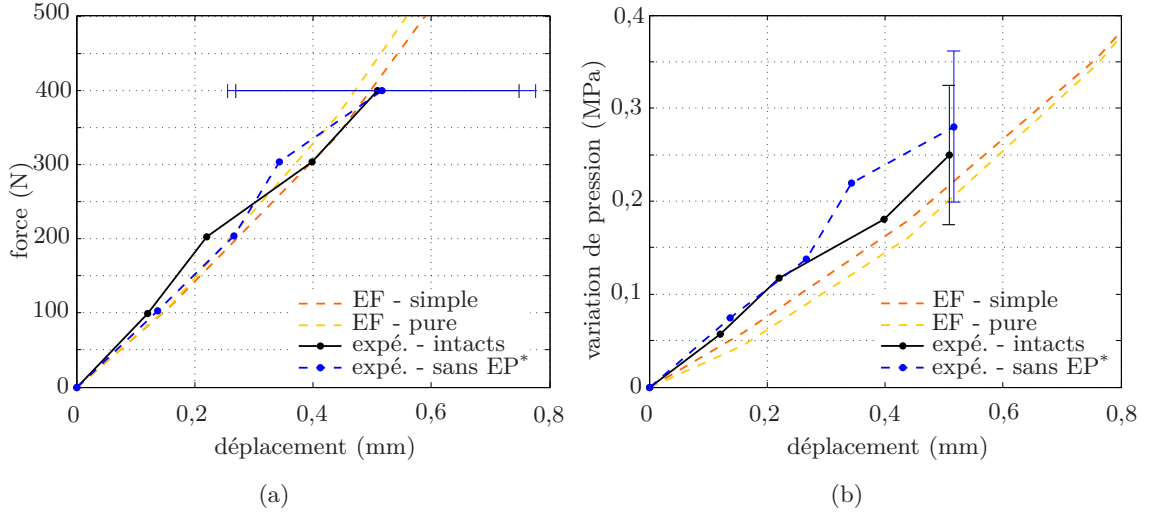


FIGURE 3.24 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en compression : (a) force en fonction du déplacement, (b) variation de pression en fonction du déplacement.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

Dans le cas de la sollicitation en compression pure, le déplacement imposé est le déplacement axial  $U_3$ , et la structure est libre de se déplacer selon les deux autres degrés de liberté en translation  $U_1$  et  $U_2$ , et les trois degrés de liberté en rotation  $U_{R_1}$ ,  $U_{R_2}$  et  $U_{R_3}$ . La Figure 3.25 montre l'évolution au cours de la sollicitation des mouvements couplés en translation (Figure 3.25a) et en rotation (Figure 3.25b), selon la simulation. On observe que la compression entraîne des mouvements couplés significatifs en cisaillement antérieur et en flexion selon la simulation EF. La Figure 3.26 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement en compression est  $U_3 = -0,5$  mm prévu par la simulation EF et observés expérimentalement sur les segments intacts et sans éléments postérieurs. Les tendances observées expérimentalement sont plutôt bien reproduites par le modèle, malgré une surestimation du déplacement antérieur et de la rotation autour de l'axe  $Y$  (dans le sens de la flexion) selon la simulation.



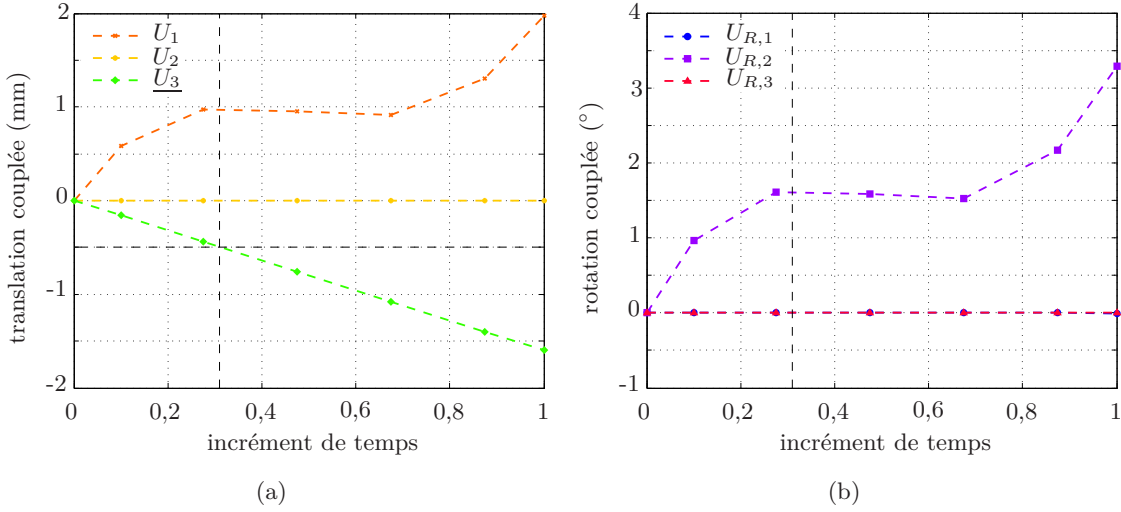


FIGURE 3.25 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en compression : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus noirs permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement axial vaut  $U_3 = -0,5$  mm.

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

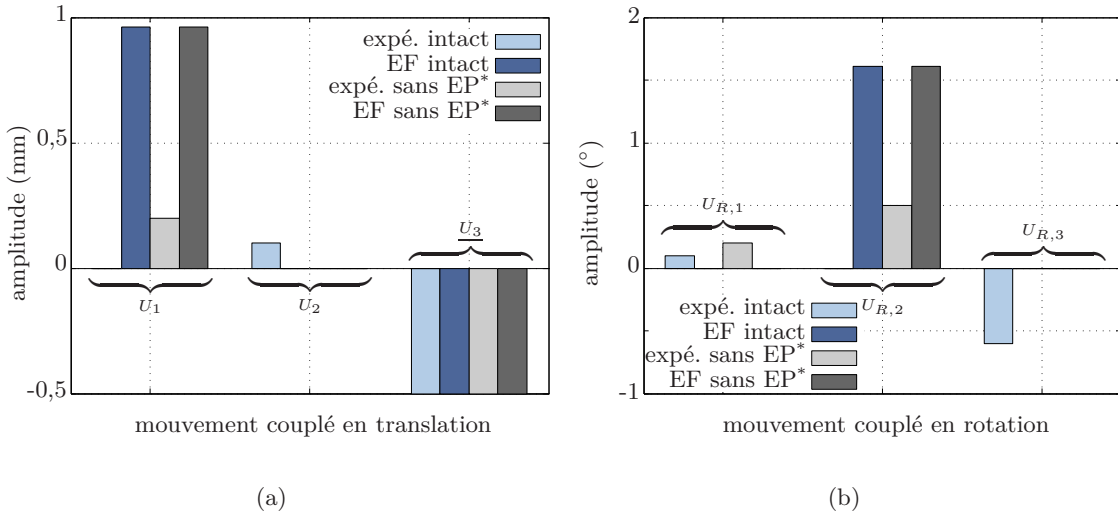


FIGURE 3.26 – Amplitude des mouvements couplés induits (a) en translation et (b) en rotation lorsque le déplacement axial vaut  $U_3 = -0,5$  mm : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.2 Flexion

L'allure de la déformée, suite à un chargement en flexion, est illustrée sur la Figure 3.27 pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.27a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.27b). Dans le cas de la sollicitation simple, le chargement paraît assez « naturel », avec un renflement de l'AF du côté antérieur. L'allure de la déformée dans le cas d'une

sollicitation simple traduit la sévérité des conditions aux limites imposées.

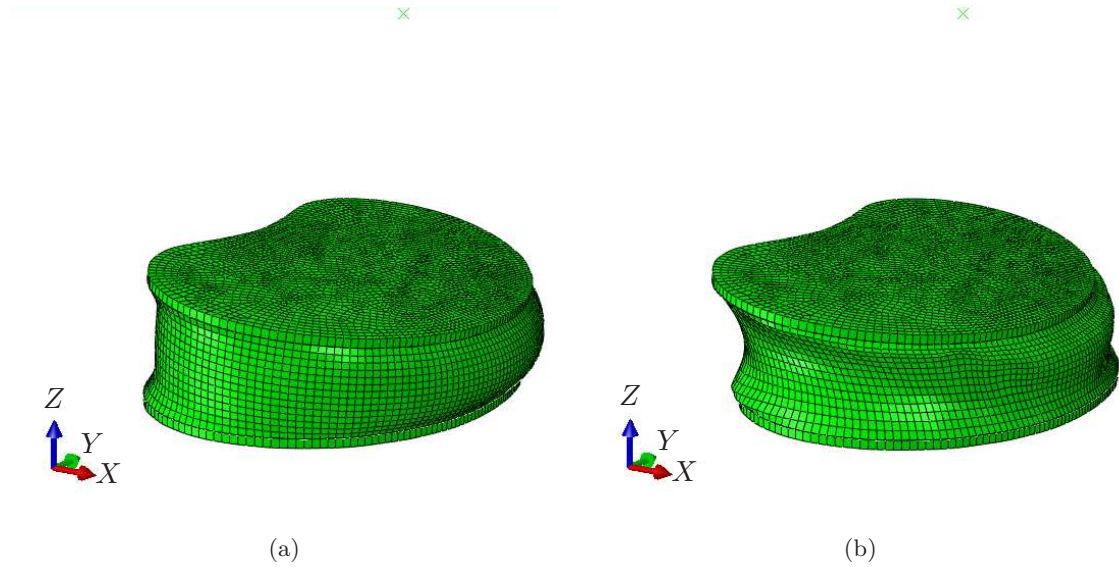


FIGURE 3.27 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en flexion : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.28 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression à l'intérieur du NP en fonction de l'angle de rotation, pour un chargement en flexion. Globalement, on observe que les résultats numériques pour les cas de chargement en sollicitation pure et en sollicitation simple encadrent les résultats expérimentaux, aussi bien pour la réponse en force que pour la réponse en variation de pression. Le modèle chargé en sollicitation pure rend bien compte des résultats expérimentaux (Figure 3.28a). En ce qui concerne la pression, on remarque que le modèle en sollicitation pure prévoit une diminution de la pression, ce qui va à l'encontre des observations expérimentales. Le modèle en sollicitation simple prévoit une augmentation de pression mais celle-ci est surestimée par rapport à l'expérience.

En flexion pure, le déplacement angulaire imposé est  $U_{R,2}$  et la structure est libre de se déplacer selon les trois degrés de liberté en translation  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les deux autres degrés de liberté en rotation  $U_{R_1}$  et  $U_{R_3}$ . La Figure 3.29 montre l'évolution, au cours de la flexion, des mouvements couplés en translation (Figure 3.29a) et en rotation (Figure 3.29b). La simulation montre l'existence de mouvements couplés significatifs en cisaillement antérieur et translation verticale. On note d'ailleurs que le déplacement vertical est positif, ce qui signifie que le PC supérieur s'est déplacé vers le haut. Le déplacement vertical augmente sur les deux premiers tiers de la sollicitation, puis diminue légèrement ensuite. Ceci pourrait expliquer le signe (négatif) de la variation de pression, ainsi que l'allure de la courbe (Figure 3.28b) obtenue par simulation. La Figure 3.30 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,2} = 5,5^\circ$  et  $U_{R,2} = 5,9^\circ$  pour la simulation EF et selon l'expérience. Les tendances expérimentales observées sont bien reproduites par le modèle, malgré une légère surestimation du déplacement antérieur selon la simulation.

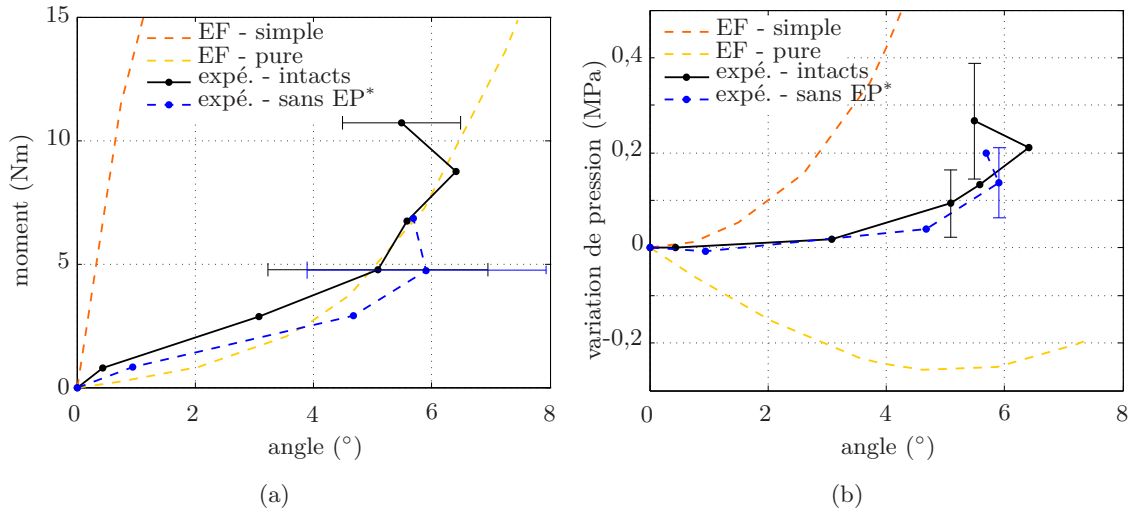


FIGURE 3.28 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en flexion : (a) moment de flexion en fonction de l'angle, (b) variation de pression en fonction de l'angle.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

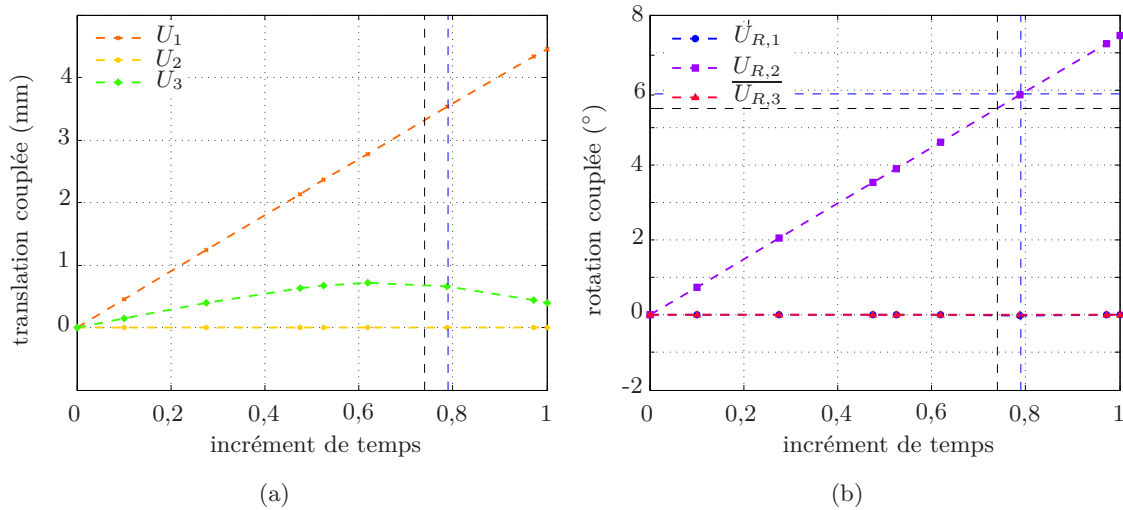


FIGURE 3.29 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en flexion : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,2} = 5,5^\circ$  (en noir) et  $U_{R,2} = 5,9^\circ$  (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement angulaire imposé.

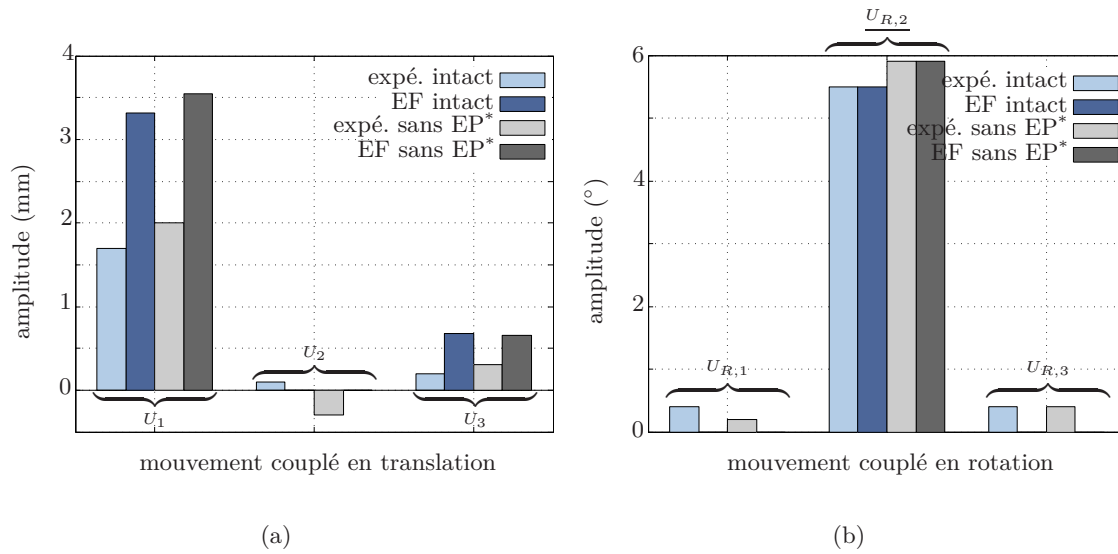


FIGURE 3.30 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en flexion : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.3 Extension

L'allure de la déformée, suite à un chargement en extension, est illustrée sur la Figure 3.31 pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.31a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.31b). Dans le cas de la sollicitation simple, on observe un léger renflement de l'AF postérieurement. Comme pour la flexion, l'allure de la déformée dans le cas d'une sollicitation simple traduit la sévérité des conditions aux limites imposées.

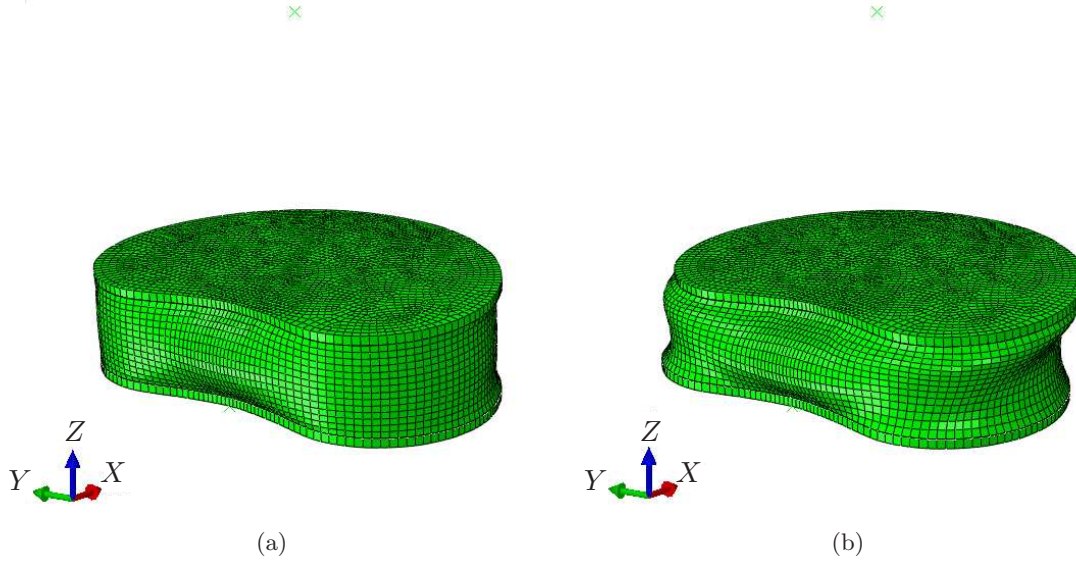


FIGURE 3.31 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en extension : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.32 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression à l'intérieur du NP en fonction de l'angle de rotation, pour un chargement en extension. Globalement, on observe que les résultats numériques pour les cas de chargement en sollicitation pure et en sollicitation simple encadrent les résultats expérimentaux, aussi bien pour la réponse en force que pour la réponse en variation de pression. En sollicitation pure, l'ordre de grandeur obtenu par simulation est légèrement sous-estimé par rapport à la tendance expérimentale, mais la courbe reste très proche des barres d'erreur expérimentales. Dans le cas d'une sollicitation simple, le moment est largement surestimé. En ce qui concerne la pression, on remarque que le modèle en sollicitation pure prévoit une diminution de la pression, ce qui va à l'encontre des observations expérimentales. Au contraire, le modèle en sollicitation simple prévoit une augmentation de pression comparable à l'augmentation observée expérimentalement. On note une légère surestimation des résultats de la simulation par rapport à l'expérience, qui reste acceptable compte tenu des écarts-types expérimentaux.

En extension pure, le déplacement angulaire imposé est  $U_{R,2}$  et la structure est libre de se déplacer selon les trois degrés de liberté en translation  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les deux autres degrés de liberté en rotation  $U_{R_1}$  et  $U_{R_3}$ . La Figure 3.33 montre l'évolution, au cours de l'extension, des mouvements couplés en translation (Figure 3.33a) et en rotation (Figure 3.33b). D'après la simulation, l'extension entraîne l'apparition de mouvements couplés en cisaillement postérieur et en translation verticale. A nouveau, on constate que le dépla-

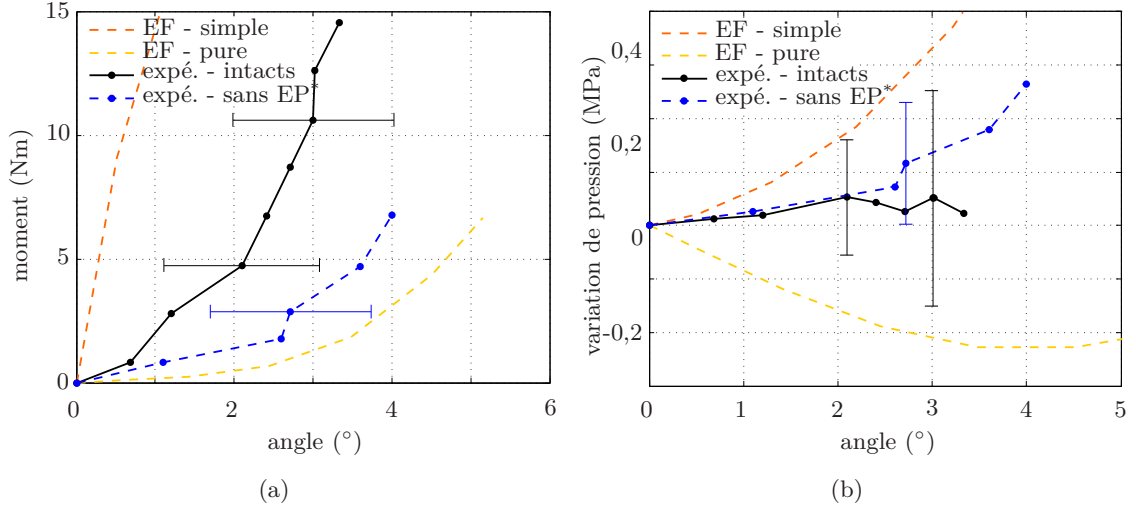


FIGURE 3.32 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en extension : (a) moment en fonction de l'angle, (b) variation de pression en fonction de l'angle.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

cement vertical est positif et que son évolution au cours de la sollicitation (comparable à celle observée en flexion) peut être mise en parallèle avec la courbe de variation de pression (Figure 3.32b). La Figure 3.34 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,2} = -2,9^\circ$  et  $U_{R,2} = -3,6^\circ$  pour la simulation EF et selon l'expérience. Les tendances EF observées sont relativement satisfaisantes en comparaison avec l'expérience, hormis concernant le déplacement vertical, et le déplacement antéro-postérieur relatif aux segments vertébraux intacts.

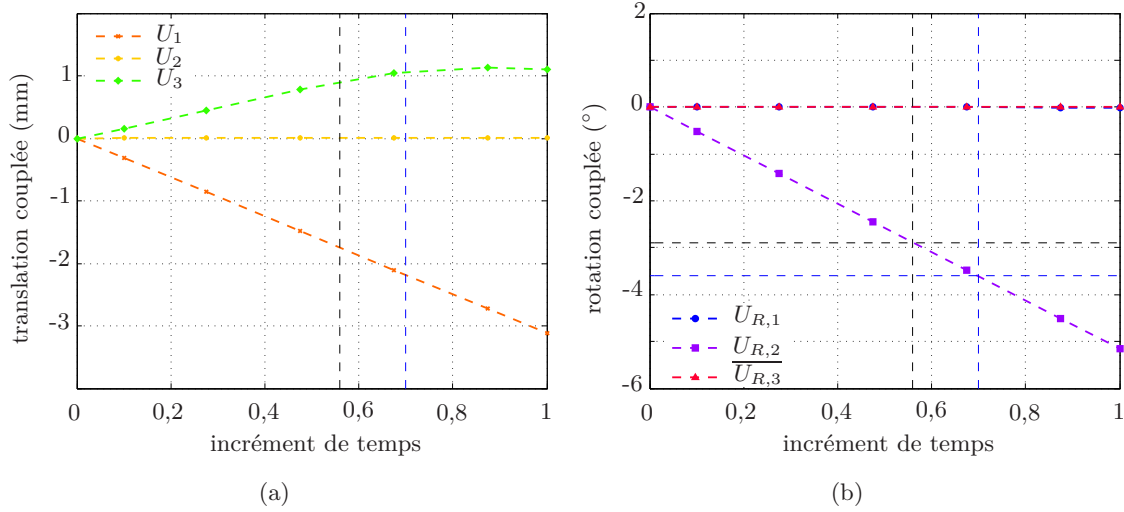


FIGURE 3.33 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en extension : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,2} = -2,9^\circ$  (en noir) et  $U_{R,2} = -3,6^\circ$  (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement angulaire imposé.

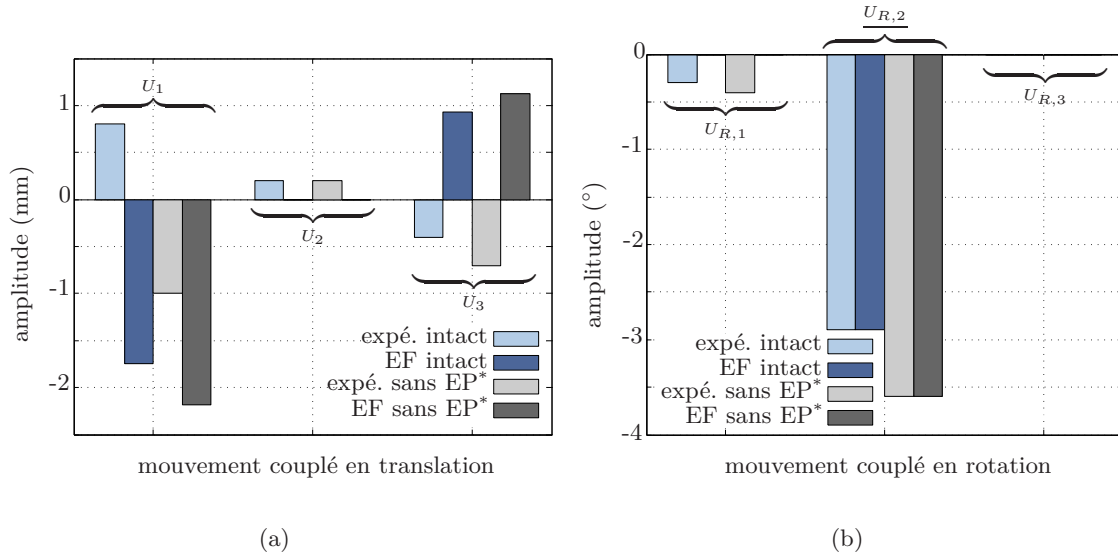


FIGURE 3.34 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en extension : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.4 Inclinaison latérale

Le maillage déformé suite à un chargement en inclinaison latérale vers la droite est illustré sur la Figure 3.35 pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.35a) et pour le cas de



sollicitation simple (Figure 3.35b). On observe un renflement de l'AF du côté droit pour les deux types de sollicitations. L'allure de la déformée dans le cas de la sollicitation simple laisse à penser que le DIV est soumis à des contraintes de cisaillement.

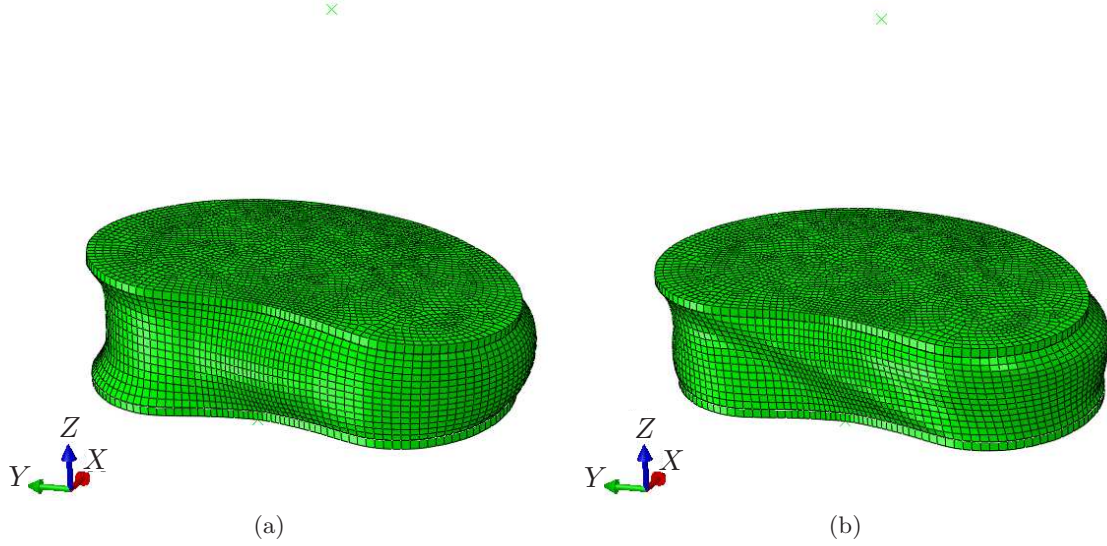


FIGURE 3.35 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en inclinaison latérale vers la droite : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.36 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression au centre du NP en fonction de l'angle de rotation, pour un chargement en inclinaison latérale vers la droite. On observe que la courbe moment vs. angle de rotation est bien reproduite par le modèle dans le cas où une sollicitation pure est imposée. Dans le cas d'une sollicitation simple, le moment est largement surestimé. En ce qui concerne la variation de pression, les résultats sont similaires à ceux observés précédemment en flexion : une augmentation de pression est prévue par le modèle en sollicitation simple, en accord avec la tendance expérimentale (même si la simulation surestime largement cette augmentation), tandis que le modèle en sollicitation pure prévoit globalement une baisse de pression au cours de l'inclinaison.

En inclinaison latérale, le déplacement angulaire imposé est  $U_{R,1}$  et la structure est libre de se déplacer selon les trois degrés de liberté en translation  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les deux autres degrés de liberté en rotation  $U_{R,2}$  et  $U_{R,3}$ . La Figure 3.37 montre l'évolution au cours de la sollicitation des mouvements couplés en translation (Figure 3.37a) et en rotation (Figure 3.37b). Selon la simulation EF, l'inclinaison latérale vers la droite entraîne des mouvements couplés significatifs en translation latérale vers la droite ( $U_2 < 0$ ) et également en translation verticale, translation antérieure et flexion. A nouveau, le lien entre l'allure du déplacement vertical et l'allure de la courbe de variation de pression (Figure 3.36b) peut être observé. La Figure 3.38 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,1} = 5,6^\circ$  et  $U_{R,1} = 5^\circ$  pour la simulation EF et selon l'expérience. Les tendances observées entre ET et expérience sont relativement satisfaisantes, hormis concernant le déplacement vertical, et le déplacement antéro-postérieur.



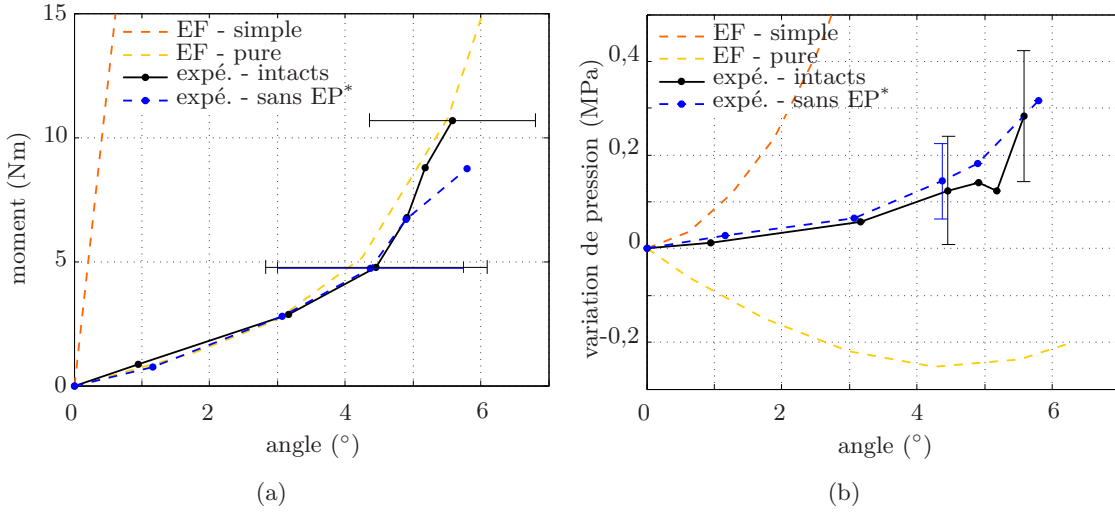


FIGURE 3.36 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en inclinaison latérale vers la droite : (a) moment en fonction de l'angle, (b) variation de pression en fonction de l'angle.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

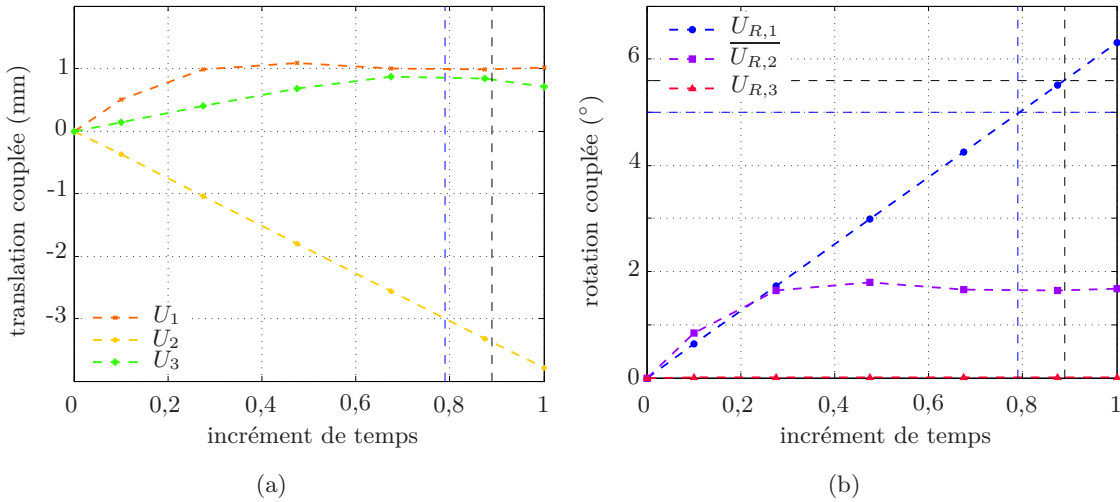


FIGURE 3.37 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en inclinaison latérale vers la droite : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,1} = 5, 6^\circ$  (en noir) et  $U_{R,1} = 5^\circ$  (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement angulaire imposé.

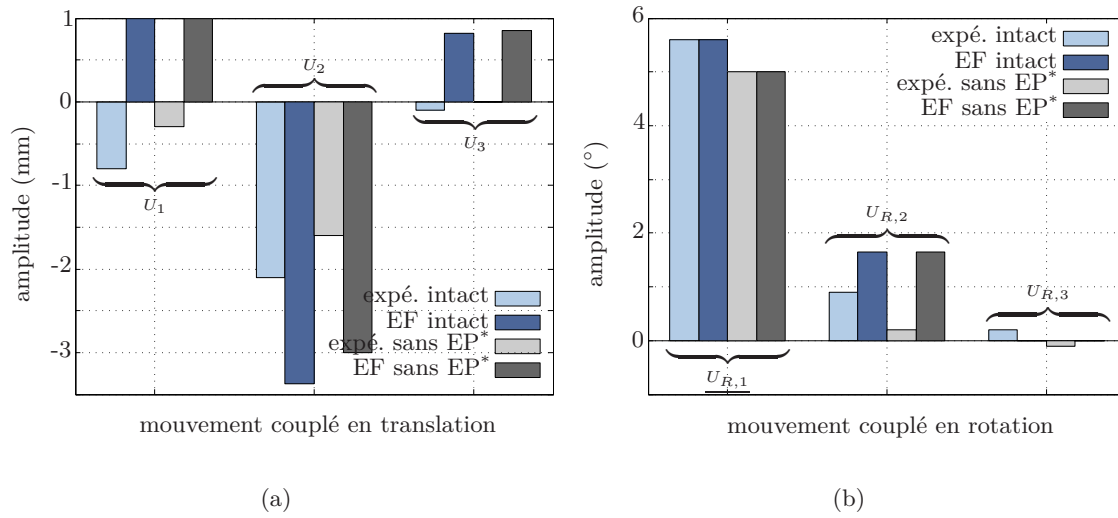


FIGURE 3.38 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en inclinaison latérale vers la droite : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.5 Torsion

Le maillage déformé suite à un chargement en torsion (dans le sens direct) est illustré sur la Figure 3.39 pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.39a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.39b). L'allure de la déformée est assez similaire dans les deux cas de sollicitation, avec probablement un déplacement vertical du PC supérieur dans le cas de la sollicitation pure.

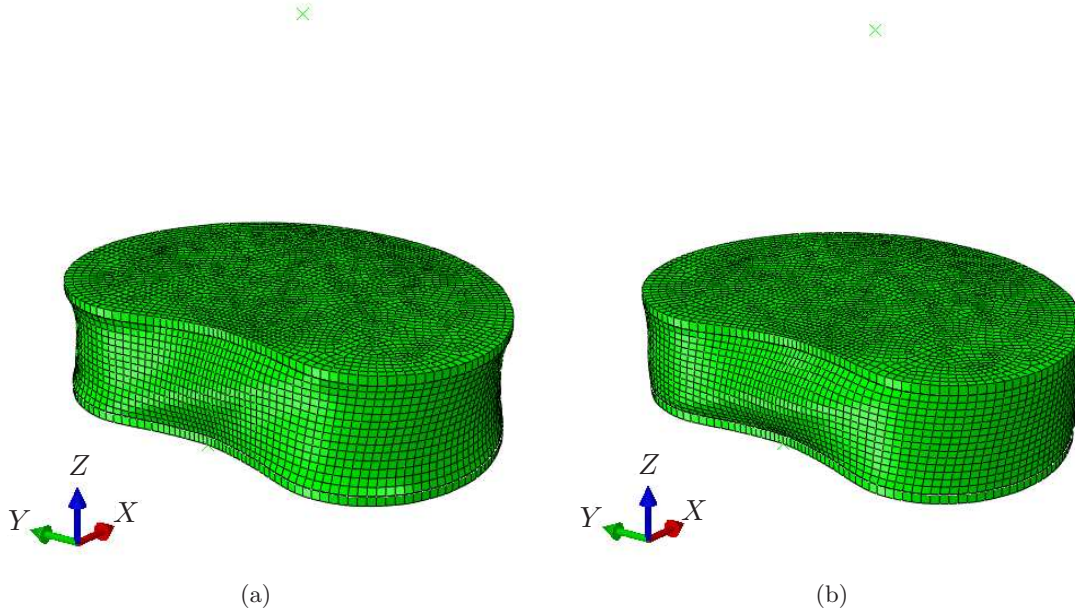


FIGURE 3.39 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en torsion : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.40 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression au centre du NP en fonction de l'angle de rotation, pour un chargement en torsion (dans le sens indirect). Les courbes moment vs. angle de rotation prévues par le modèle pour les deux sollicitations sont très similaires et proches des courbes expérimentales. Concernant la variation de pression, le modèle en sollicitation simple reproduit bien les résultats expérimentaux, mais le modèle en sollicitation pure prévoit d'abord une diminution de pression, puis une augmentation.

En torsion, le déplacement angulaire imposé est  $U_{R,3}$  ( $U_{R,3} > 0$  pour une torsion dans le sens direct, et  $U_{R,3} < 0$  pour une torsion dans le sens indirect) et la structure est libre de se déplacer selon les trois degrés de liberté en translation en  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les deux autres degrés de liberté en rotation  $U_{R,1}$  et  $U_{R,2}$ . La Figure 3.41 montre l'évolution au cours de la sollicitation des mouvements couplés en translation (Figure 3.41a) et en rotation (Figure 3.41b). Selon la simulation EF, une torsion dans le sens indirect entraîne des mouvements couplés significatifs en cisaillement antérieur, cisaillement latéral vers la gauche ( $U_2 > 0$ ), déplacement vertical et flexion. A nouveau, la corrélation entre le déplacement vertical et la variation de pression (Figure 3.40b) apparaît. La Figure 3.42 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,3} = -1,4^\circ$  et  $U_{R,1} = -2,3^\circ$  pour la simulation EF et selon l'expérience. On observe que la simulation

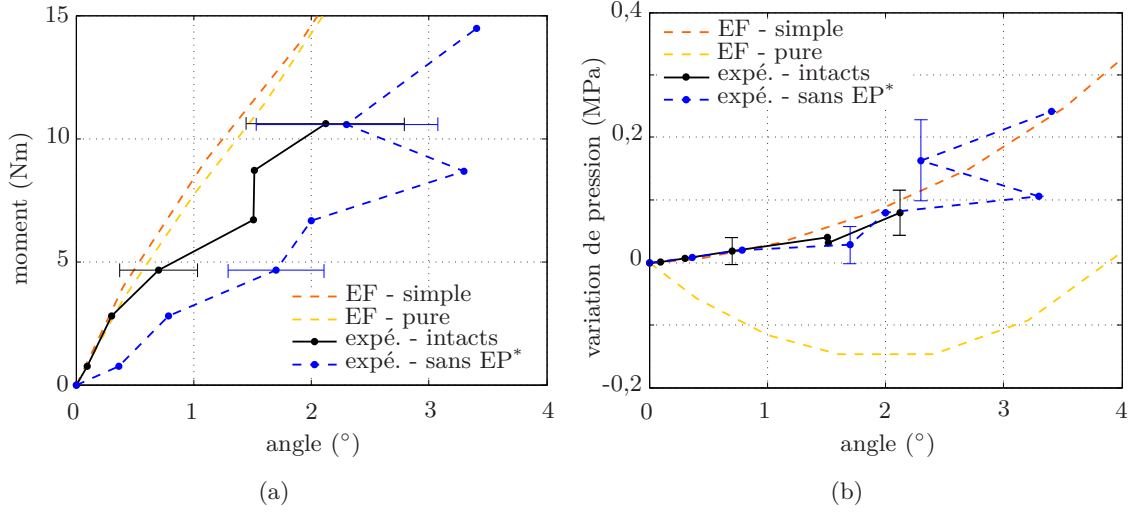


FIGURE 3.40 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en torsion : (a) moment en fonction de l'angle, (b) variation de pression en fonction de l'angle. Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

prévoit un déplacement vertical important, ce qui n'est pas observé expérimentalement. En outre, les tendances observées sont inversées concernant le déplacement antéro-postérieur (segments intacts et sans éléments postérieurs) et le moment en flexion/extension (segments sans éléments postérieurs).

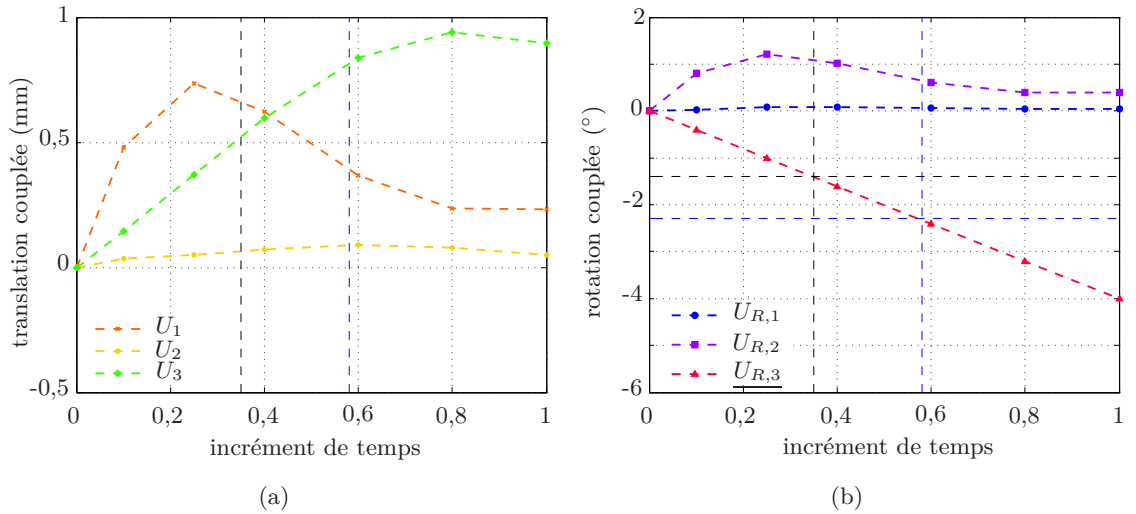


FIGURE 3.41 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en torsion : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement angulaire vaut  $U_{R,3} = -1,4^\circ$  (en noir) et  $U_{R,3} = 2,3^\circ$  (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement angulaire imposé.

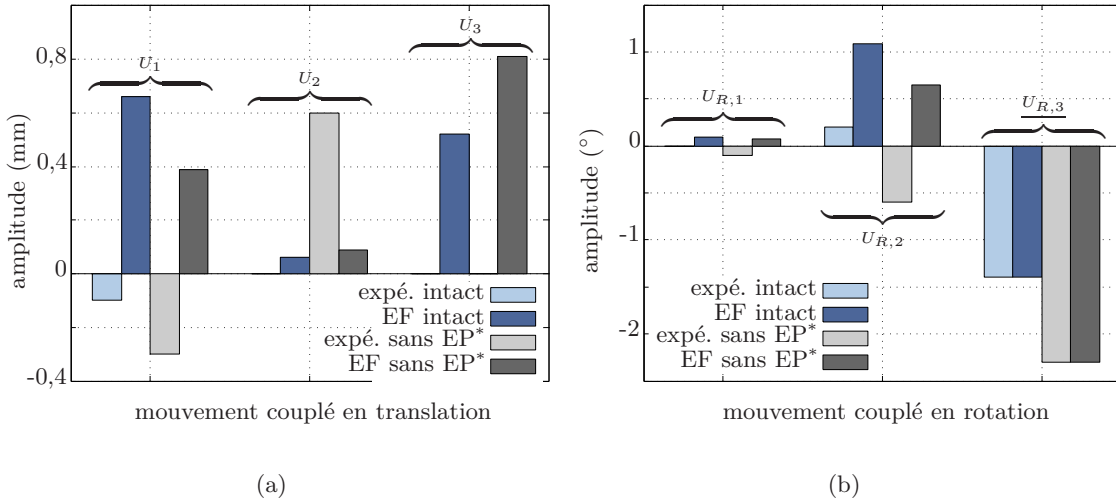


FIGURE 3.42 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en torsion : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.6 Cisaillement antérieur

La Figure 3.43 montre l'allure du maillage déformé suite à un chargement en cisaillement antérieur, pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.43a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.43b). Dans le cas d'une sollicitation pure, on observe également une inclinaison du PC supérieur autour de l'axe Y (flexion du DIV). Comme précédemment, la sévérité des conditions aux limites dans le cas d'une sollicitation simple est clairement visible.

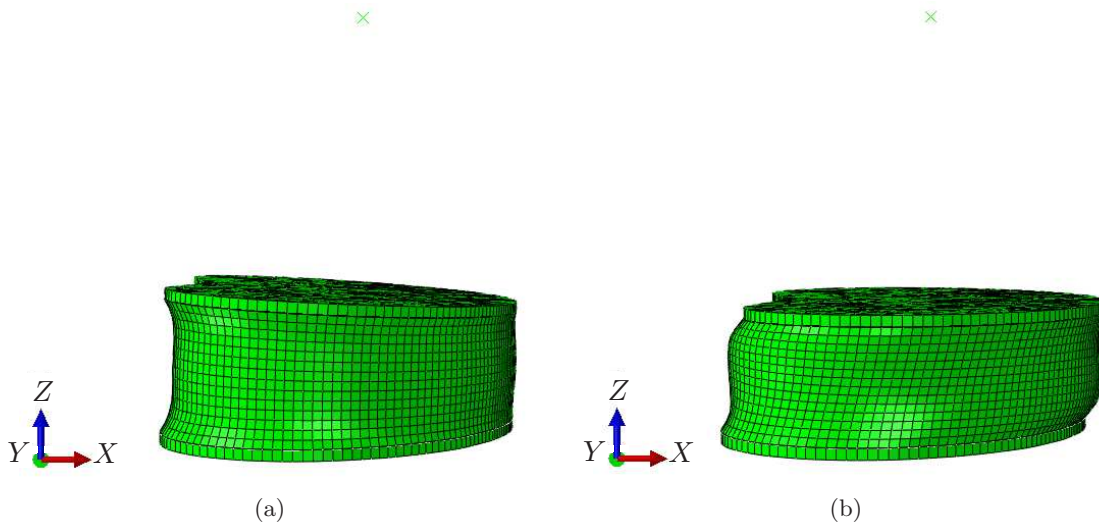


FIGURE 3.43 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en cisaillement antérieur : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.44 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression à l'intérieur du NP en fonction du déplacement, en cisaillement antérieur. Globalement, on observe que les résultats numériques pour les cas de chargement en sollicitation pure et en sollicitation simple encadrent les résultats expérimentaux, aussi bien pour la réponse en force que pour la réponse en variation de pression. Cependant, en sollicitation simple, la force prévue par la simulation surestime largement la réponse expérimentale, tandis qu'en sollicitation pure, la force est sous-estimée. Concernant la pression, à nouveau, le modèle en sollicitation pure prévoit une diminution de cette dernière tandis que le modèle en sollicitation simple prévoit une augmentation, en accord avec les mesures expérimentales.

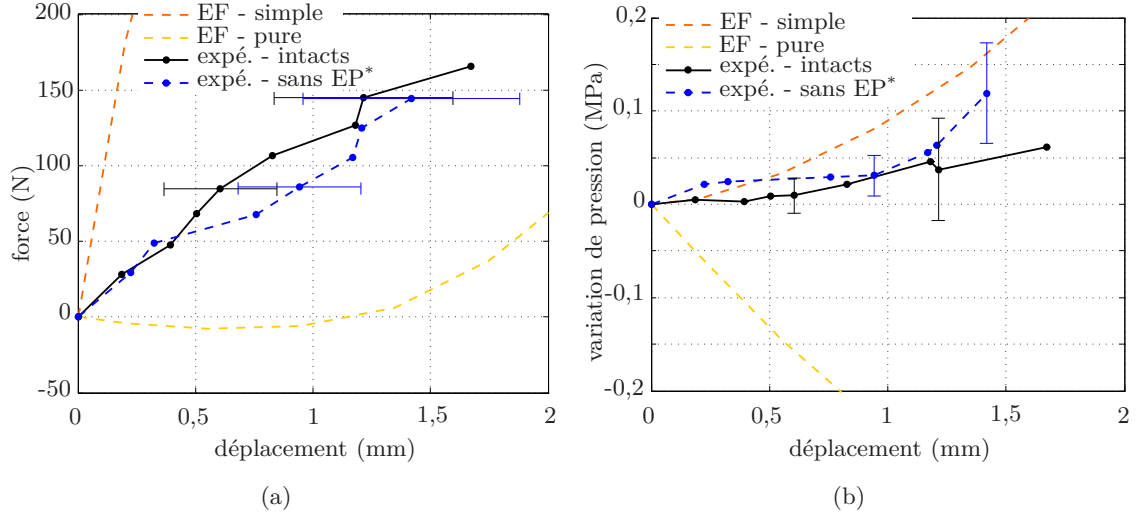


FIGURE 3.44 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en cisaillement antérieur : (a) force en fonction du déplacement, (b) variation de pression en fonction du déplacement.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

En cisaillement antérieur, le déplacement imposé est  $U_1$  et la structure est libre de se déplacer selon les deux autres degrés de liberté en translation  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les trois degrés de liberté en rotation  $U_{R1}$ ,  $U_{R2}$  et  $U_{R3}$ . La Figure 3.45 montre l'évolution, au cours du cisaillement antérieur, des mouvements couplés en translation (Figure 3.45a) et en rotation (Figure 3.45b). La simulation montre l'existence de mouvements couplés significatifs en flexion et en translation verticale. A nouveau, l'allure la courbe d'évolution du déplacement vertical au cours de la sollicitation permet d'expliquer l'allure de la courbe de variation de pression (Figure 3.44b). La Figure 3.46 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement antérieur vaut  $U_1 = 1,2$  mm et  $U_1 = 1,4$  mm pour la simulation EF et selon l'expérience. Hormis concernant le déplacement vertical (largement sur-évalué par la simulation par rapport à l'expérience), les tendances expérimentales sont reproduites par le modèle de façon très satisfaisante.

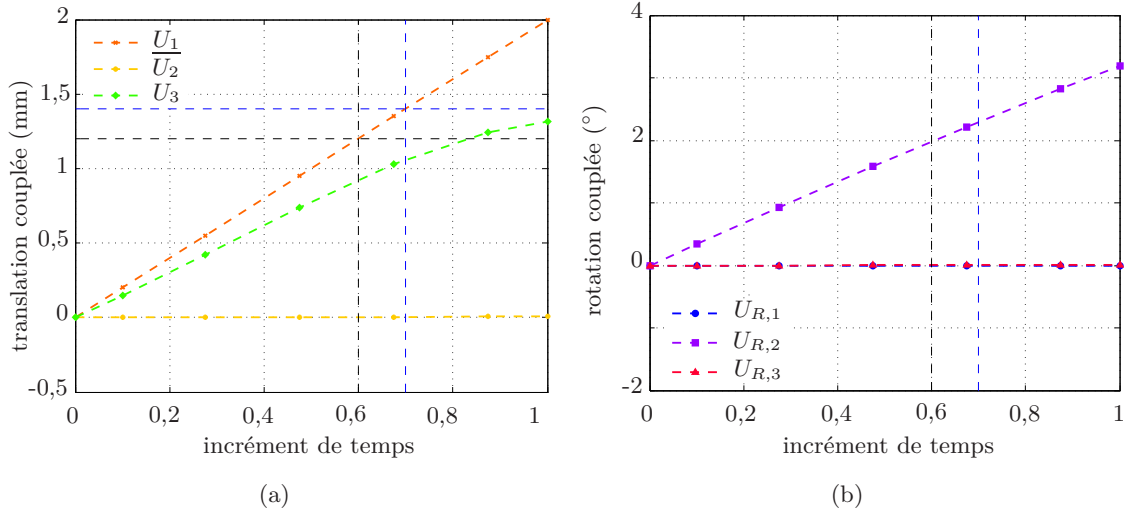


FIGURE 3.45 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en cisaillement antérieur : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement vaut  $U_1 = 1,2$  mm (en noir) et  $U_1 = 1,4$  mm (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

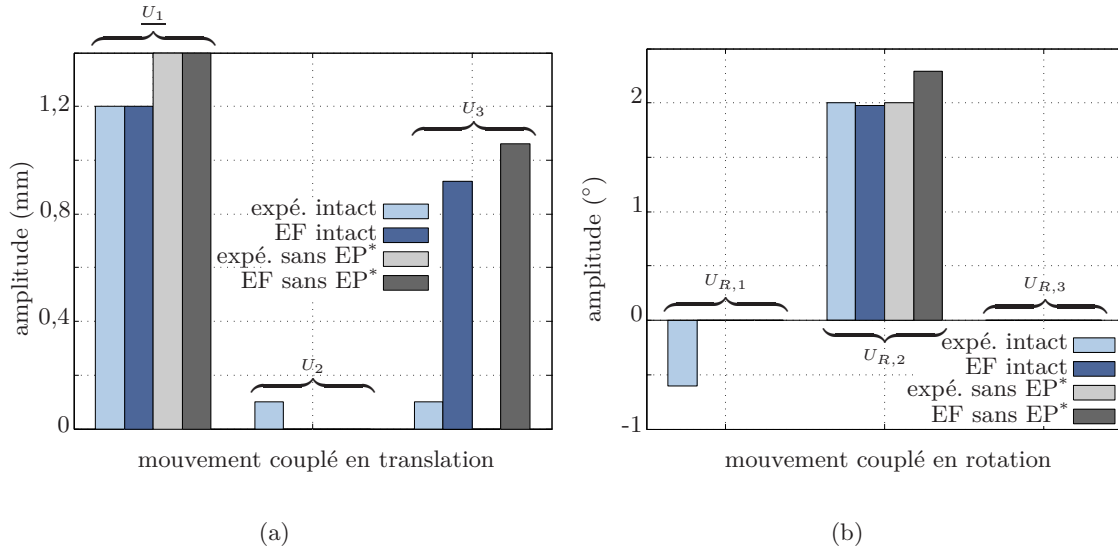


FIGURE 3.46 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en cisaillement antérieur : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.7 Cisaillement postérieur

La Figure 3.47 montre l'allure de la déformée suite à un chargement en cisaillement postérieur, pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.47a) et pour le cas de sollicitation

simple (Figure 3.47b). Dans le cas d'une sollicitation pure, on observe également une inclinaison du PC supérieur autour de l'axe  $-Y$  (extension). Comme précédemment, la sévérité des conditions aux limites dans le cas d'une sollicitation simple est visible.

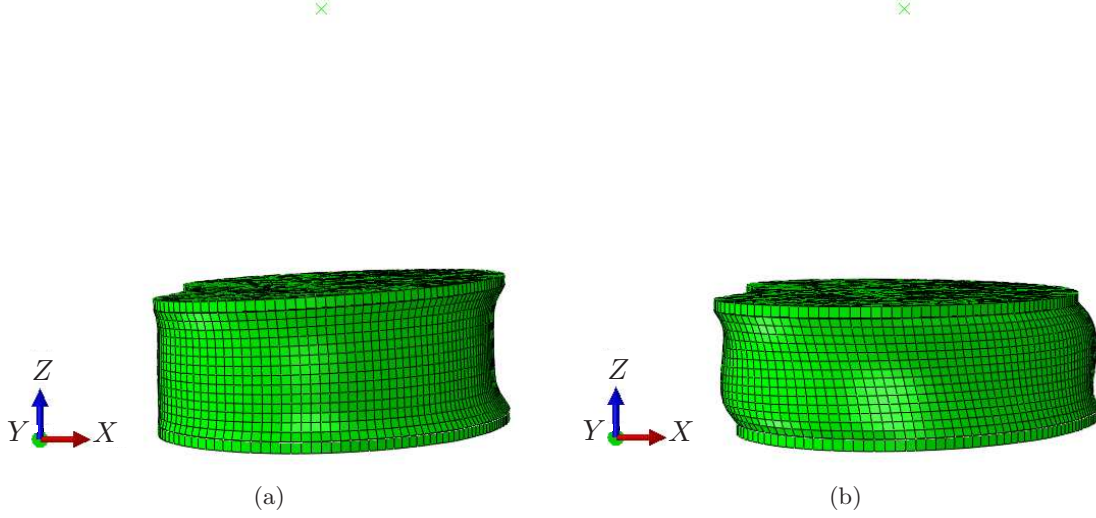


FIGURE 3.47 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en cisaillement postérieur : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.48 présente la comparaison entre les résultats EF et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression à l'intérieur du NP en fonction du déplacement, en cisaillement postérieur. Globalement, on observe que les résultats numériques pour les cas de chargement en sollicitation pure et en sollicitation simple encadrent les résultats expérimentaux, aussi bien pour la réponse en force que pour la réponse en variation de pression. Toutefois, l'écart-type autour des valeurs moyennes expérimentales est très important. Concernant la pression, le modèle en sollicitation pure prévoit une diminution de cette dernière tandis que le modèle en sollicitation simple prévoit une augmentation de la pression similaire à la tendance observée expérimentalement.

En cisaillement postérieur, le déplacement imposé est  $U_1$  et la structure est libre de se déplacer selon les deux autres degrés de liberté en translation  $U_2$  et  $U_3$ , et selon les trois degrés de liberté en rotation  $U_{R_1}$ ,  $U_{R_2}$  et  $U_{R_3}$ . La Figure 3.49 montre l'évolution, au cours du cisaillement postérieur, des mouvements couplés en translation (Figure 3.49a) et en rotation (Figure 3.49b), selon la simulation. On observe qu'un cisaillement postérieur entraîne l'apparition de mouvements couplés en translation verticale et en extension. A nouveau, l'allure la courbe d'évolution du déplacement vertical au cours de la sollicitation permet d'expliquer l'allure de la courbe de variation de pression (Figure 3.48b). La Figure 3.50 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement postérieur vaut  $U_1 = -0,8$  mm (en noir) et  $U_1 = -1,2$  mm pour la simulation EF et selon l'expérience. A nouveau, excepté le déplacement vertical, les tendances expérimentales sont reproduites par le modèle de façon très satisfaisante.



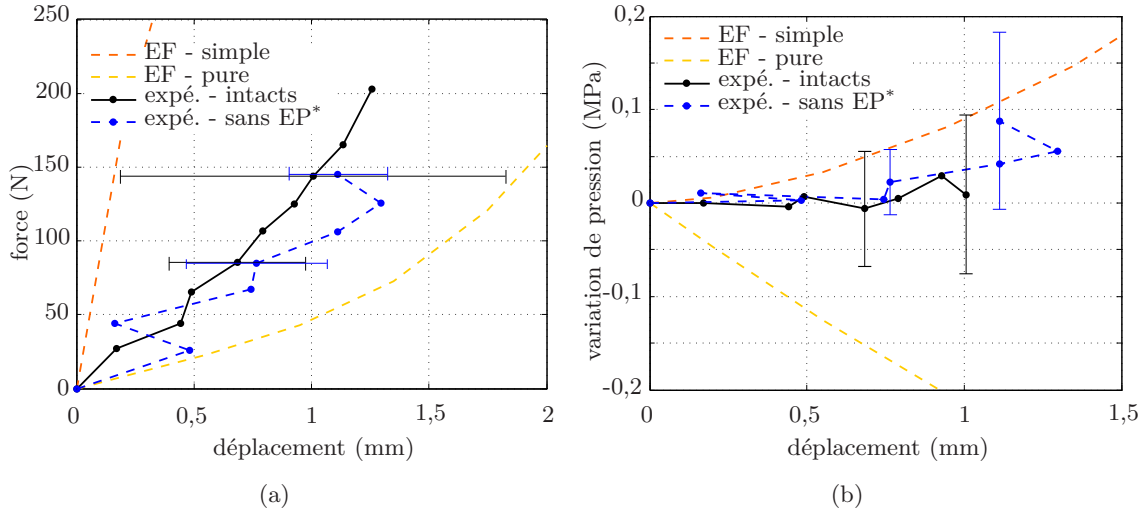


FIGURE 3.48 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en cisaillement postérieur : (a) force en fonction du déplacement, (b) variation de pression en fonction du déplacement.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

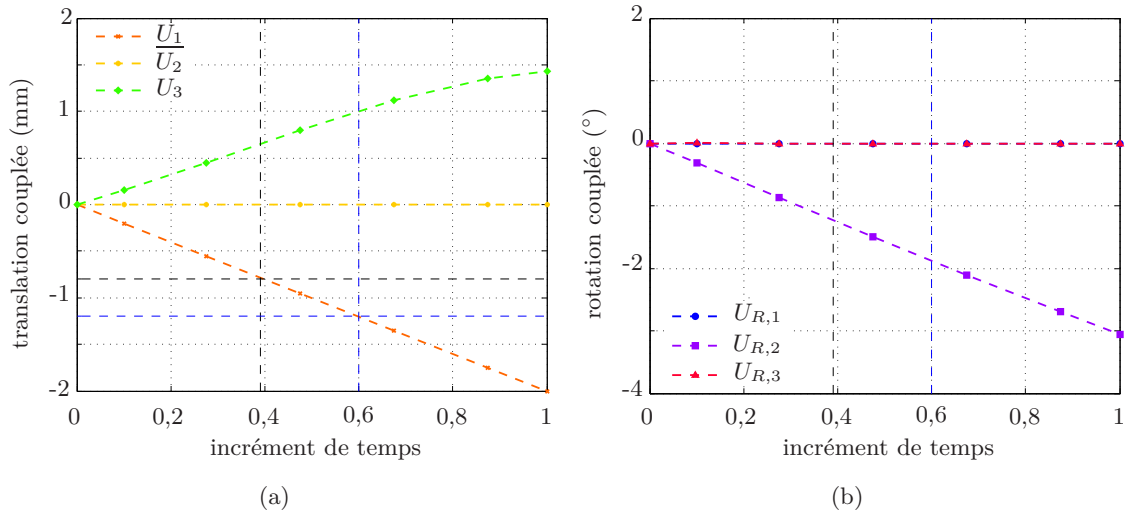


FIGURE 3.49 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en cisaillement postérieur : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement vaut  $U_1 = -0,8$  mm (en noir) et  $U_1 = -1,2$  mm (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

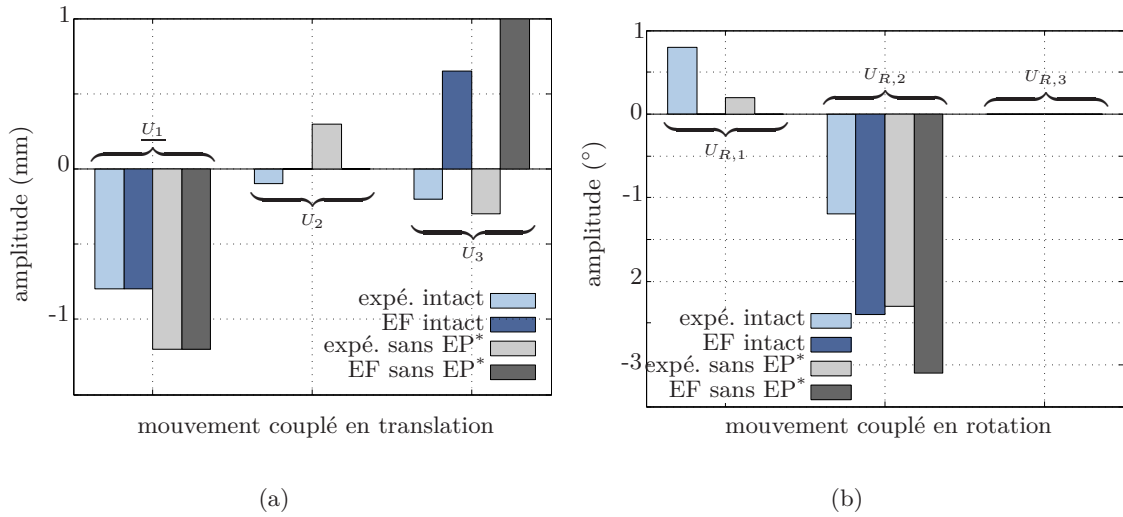


FIGURE 3.50 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en cisaillement postérieur : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.2.8 Cisaillement latéral

L'allure de la déformée, suite à un chargement en cisaillement latéral (vers la droite), est illustrée sur la Figure 3.31, pour le cas de sollicitation pure (Figure 3.51a) et pour le cas de sollicitation simple (Figure 3.51b). Dans le cas d'une sollicitation pure, on observe également une inclinaison du PC supérieur autour de l'axe  $X$  (inclinaison latérale vers la droite). L'allure de la déformée dans le cas d'une sollicitation simple traduit la sévérité des conditions aux limites imposées.

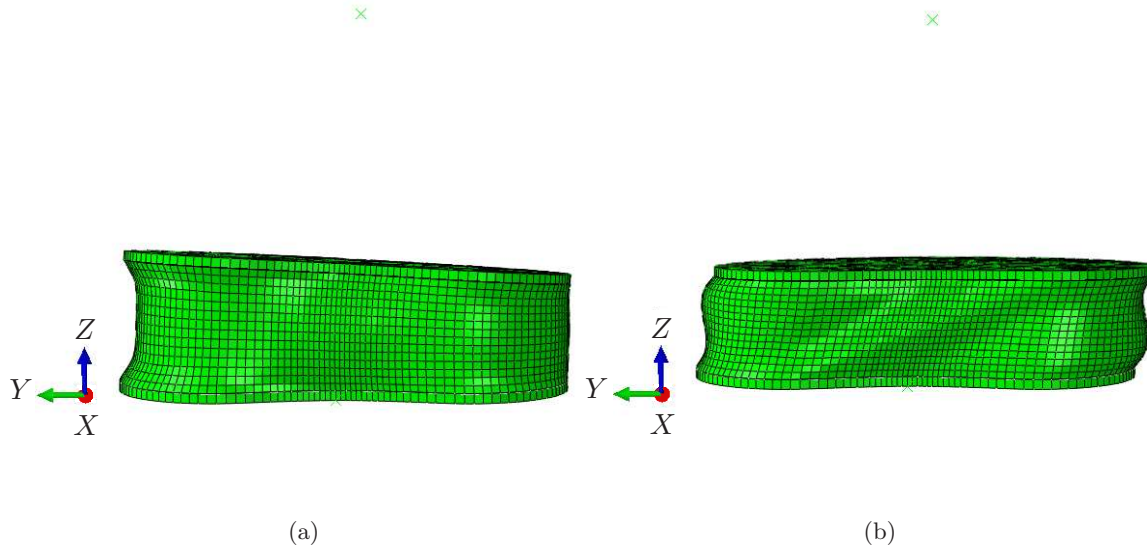


FIGURE 3.51 – Allure de la déformée du DIV suite à un chargement en cisaillement latéral vers la droite : (a) sollicitation pure, (b) sollicitation simple.

La Figure 3.52 présente la comparaison entre les résultats EF obtenus et les résultats expérimentaux sur l'amplitude du mouvement et la variation de pression au centre du NP en fonction du déplacement, pour un chargement en cisaillement latéral vers la droite. Les observations sont similaires à celles observées pour le cisaillement antérieur ou postérieur. Les résultats numériques pour les cas de chargement en sollicitation pure et en sollicitation simple encadrent les résultats expérimentaux, aussi bien pour la réponse en force que pour la réponse en variation de pression, avec un écart-type autour des valeurs moyennes expérimentales très important sur la courbe force vs. déplacement (Figure 3.52a). On observe à nouveau une diminution de la pression selon le modèle en sollicitation pure et une augmentation de la pression selon le modèle en sollicitation, en accord avec la tendance expérimentale observée.

En cisaillement latéral, le déplacement imposé est  $U_2$  ( $U_2 > 0$  pour un cisaillement vers la gauche, et  $U_2 < 0$  pour un cisaillement vers la droite) et la structure est libre de se déplacer selon les deux autres degrés de liberté en translation  $U_1$  et  $U_3$ , et selon les trois degrés de liberté en rotation  $U_{R1}$ ,  $U_{R2}$  et  $U_{R3}$ . La Figure 3.53 montre l'évolution au cours de la sollicitation des mouvements couplés en translation (Figure 3.53a) et en rotation (Figure 3.53b). Selon la simulation EF, un cisaillement latéral vers la droite entraîne des mouvements couplés significatifs en cisaillement antérieur, un déplacement vertical, ainsi que de la flexion et de l'inclinaison latérale vers la droite. A nouveau, l'allure la courbe

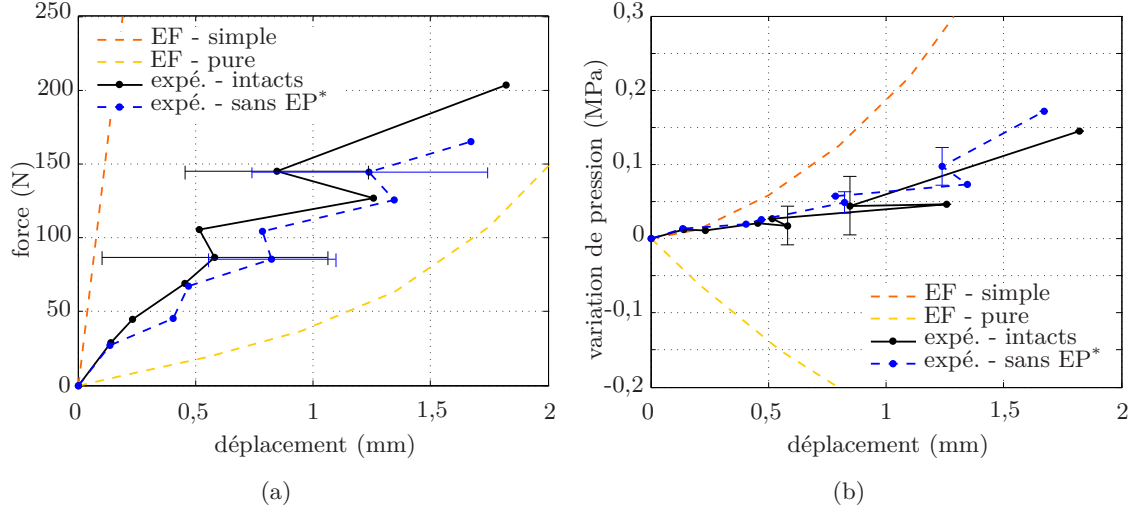


FIGURE 3.52 – Comparaison des résultats EF et expérimentaux sur une sollicitation en cisaillement latéral : (a) force en fonction du déplacement, (b) variation de pression en fonction du déplacement.

Note : sans EP\* - segments vertébraux pour lesquels les éléments postérieurs ont été ôtés.

d'évolution du déplacement vertical au cours de la sollicitation permet d'expliquer l'allure de la courbe de variation de pression (Figure 3.52b). La Figure 3.54 montre l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement vaut  $U_2 = -1$  mm et  $U_2 = -1,1$  mm pour la simulation EF et selon l'expérience. Les résultats EF sont en accord avec les tendances expérimentales observées en inclinaison latérale et en torsion. Les prévisions du modèle sont moins satisfaisantes pour les autres mouvements couplés.

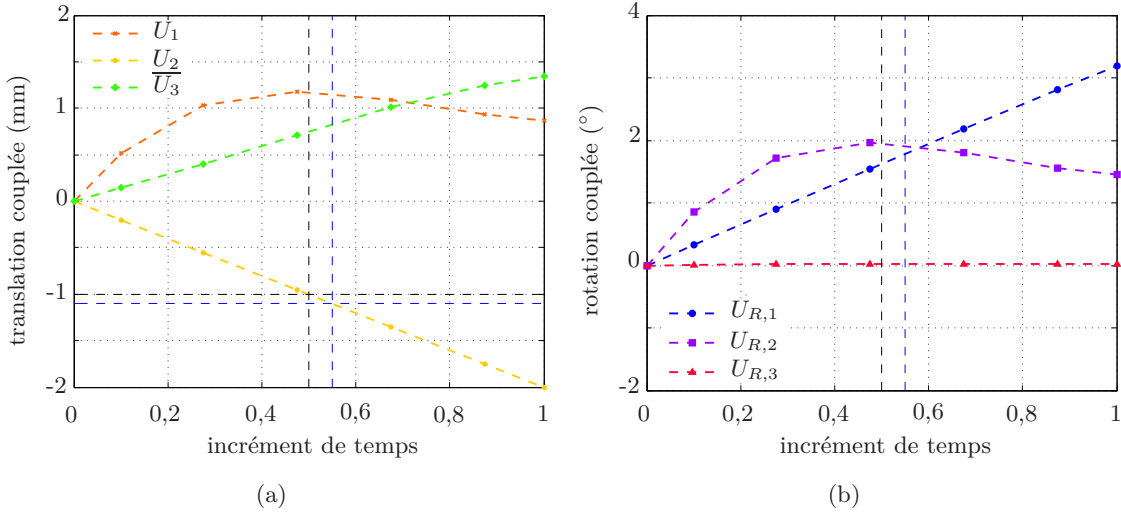


FIGURE 3.53 – Evolution des mouvements couplés prévus par la simulation EF en fonction de l'incrément de temps induits par une sollicitation en cisaillement latéral vers la droite : (a) translations couplées, (b) rotations couplées. Les traits discontinus permettent de repérer l'amplitude des mouvements couplés lorsque le déplacement vaut  $U_2 = -1$  mm (en noir) et  $U_2 = -1,1$  mm (en bleu).

Note : la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

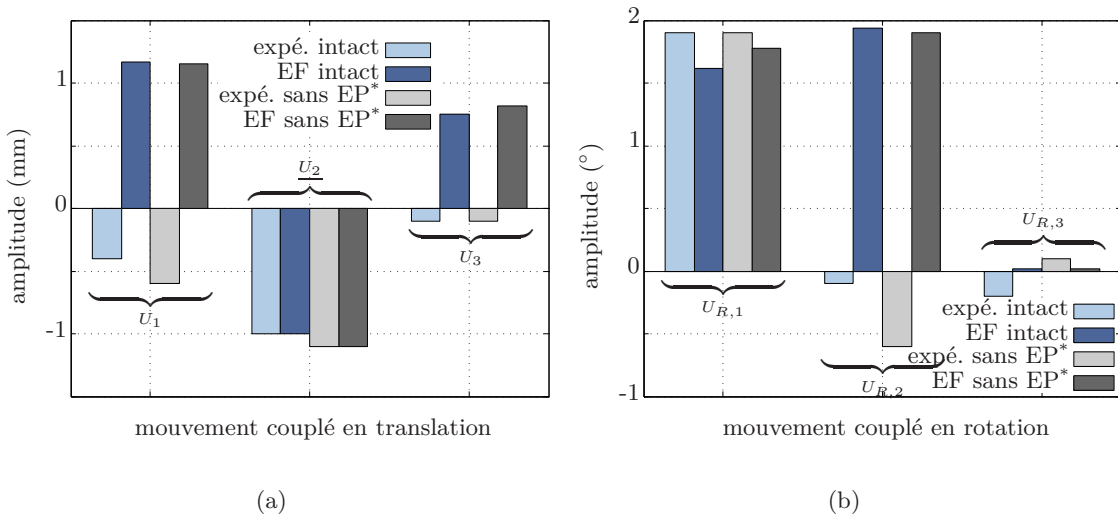


FIGURE 3.54 – Amplitude des mouvements couplés (a) en translation et (b) en rotation induits par une sollicitation en cisaillement latéral : comparaison entre les résultats EF et expérimentaux.

Notes : sans EP\* - sans éléments postérieurs ; la grandeur soulignée correspond au déplacement imposé.

### 3.3.3 Bilan

Le tableau 3.6 propose un bilan de la capacité du modèle à prédire le comportement du DIV observé expérimentalement en ce qui concerne l'amplitude du mouvement principal

ainsi que la variation de pression intradiscale. La couleur verte est utilisée pour symboliser que la tendance prédite par la simulation est en accord avec la tendance observée expérimentalement. La couleur rouge marque une tendance opposée entre prédiction EF et expérience. On remarque que, **quel que soit le mode de chargement et le type de sollicitation (simple ou pure) imposés, la simulation reproduit le mouvement principal de façon satisfaisante**. En sollicitations pures, l'amplitude du mouvement principal coïncide bien avec les courbes expérimentales (sauf en cisaillement antérieur où l'ordre de grandeur est moyennement satisfaisant). En sollicitations simples, les tendances observées expérimentalement sont également prévues par la simulation, mais l'ordre de grandeur est généralement largement surestimé par la simulation (hormis dans le cas de la compression). En effet, les conditions aux limites imposées dans le cas des sollicitations simples sont beaucoup plus contraignantes que les conditions aux limites réelles expérimentales. En ce qui concerne la prévision de la **variation de pression intradiscale prévue par le modèle**, le bilan est plus mitigé. En effet, **dans le cas des sollicitations simples, les tendances expérimentales sont bien reproduites par le modèle**, et l'ordre de grandeur est satisfaisant en compression et cisaillement antéro-postérieur. Au contraire, dans le cas des sollicitations pures, la simulation EF prédit une tendance opposée à la tendance observée expérimentalement, sauf pour un chargement en compression où les prévisions EF coïncident avec les observations expérimentales. Néanmoins, les observations effectuées sur l'ensemble des chargements montrent que la variation de pression est corrélée au déplacement vertical. Dès lors, il semble que ce soit le choix des **conditions aux limites qui détermine la réponse globale du DIV**.

Le tableau 3.7 propose un bilan de la capacité du modèle à prédire les tendances expérimentales en ce qui concerne les mouvements couplés selon le type de sollicitation. Le code de couleur utilisé est le même que précédemment : la couleur verte montre que la tendance EF respecte la tendance observée expérimentalement, la couleur rouge marque une tendance opposée. Si l'on effectue un constat général, on peut dire que le modèle est globalement capable de reproduire les observations expérimentales sous de multiples cas de chargement. En flexion, extension, cisaillement antérieur, cisaillement postérieur, et compression, le modèle est assez performant. Le modèle est moins satisfaisant en cisaillement latéral et torsion (en comparaison avec les données expérimentales sans éléments postérieurs). D'une manière générale, la prédiction du déplacement latéral, de l'inclinaison latérale, de la flexion/extension et de la torsion couplés est correcte pour tous les chargements. La prédiction du déplacement antéro-postérieur et du déplacement selon l'axe vertical est moins satisfaisante.

Néanmoins, l'ensemble des résultats observés pour l'étude des mouvements couplés sont à prendre avec précaution, dans la mesure où il y a une grande sensibilité vis-à-vis de la position du point de mesure (aussi bien expérimentalement que dans la simulation). Le tableau 3.7 est donc à relativiser.

Il faut, en outre, garder à l'esprit que la géométrie possède une influence sur l'ensemble des résultats présentés, même si les expériences rendent compte d'une moyenne effectuée sur 42 DIV (provenant d'individus de sexe, âge, taille, niveau lombaire, etc. différents) et que le modèle a été construit dans le but d'être statistiquement représentatif d'un DIV lombaire moyen.

Sollicitation		Prévision de la réponse	
		amplitude du mouvement	variation de pression
Flexion	pure	++	—
	simple	+(!)	+
Extension	pure	+	—
	simple	+(!)	+
Inclinaison latérale	pure	++	—
	simple	+(!)	+
Torsion	pure	+	—
	simple	+	++
Compression	pure	++	++
	simple	++	++
Cisaillement antérieur	pur	+(!)	—
	simple	+(!)	++
Cisaillement postérieur	pur	+	—
	simple	+	++
Cisaillement latéral	pur	+	—
	simple	+(!)	+

TABLEAU 3.6 – Capacité du modèle à prédire les tendances expérimentales (amplitude du mouvement et variation de pression intradiscale) selon le type de sollicitation.

---

Signification des symboles utilisés :

- + : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement,
  - ++ : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement et l'ordre de grandeur est bon,
  - +(!) : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement mais l'ordre de grandeur n'est pas respecté,
  - : la tendance obtenue par la simulation EF va à l'encontre de la tendance observée expérimentalement.
-

Sollicitation	Translation couplée			Rotation couplée		
	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_{R,1}$	$U_{R,2}$	$U_{R,3}$
<i>Eléments postérieurs intacts</i>						
Flexion	+	+(~)	+	+(~)		+(~)
Extension	-	+(~)	-	+(!)		++
Inclinaison latérale	-	+	-		+	+(~)
Torsion	--	+(~)	-	+(~)	+(!)	
Compression	-	+(~)		+(~)	-	-
Cisaillement antérieur		+(~)	+(!)	-	++	++
Cisaillement postérieur		+(~)	-	+(~)	+	++
Cisaillement latéral	--		--	++	--	-(~)
<i>Eléments postérieurs ôtés</i>						
Flexion	+	+(~)	+	+(~)		+(~)
Extension	+	+(~)	-	+(~)		++
Inclinaison latérale	-	+	-		+(!)	+(~)
Torsion	--	+(!)	-	-(~)	-	
Compression	+(!)	++		+(~)	+(!)	++
Cisaillement antérieur		++	--	++	++	++
Cisaillement postérieur		-	--	+(~)	++	++
Cisaillement latéral	--		--	++	--	++

TABLEAU 3.7 – Capacité du modèle à prédire les mouvements couplés selon le type de sollicitation, en comparaison avec les résultats expérimentaux dans lesquels les éléments postérieurs sont intacts ou ont été ôtés.

Signification des symboles utilisés :

- + : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement,
- ++ : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement et l'ordre de grandeur est bon,
- +(!) : la tendance obtenue par la simulation EF respecte la tendance observée expérimentalement mais l'ordre de grandeur n'est pas respecté,
- +(~) : l'une des valeurs EF ou expérimentales est nulle, et l'autre est de faible amplitude,
- : la tendance obtenue par la simulation EF va à l'encontre de la tendance observée expérimentalement,
- : la tendance obtenue par la simulation EF va à l'encontre de la tendance observée expérimentalement et l'ordre de grandeur (en valeur absolue) est incorrect,
- (~) : la tendance obtenue par la simulation EF va à l'encontre de la tendance observée expérimentalement mais les valeurs comparées sont de faible amplitude.



### 3.4 Discussion et conclusion

Au cours de ce chapitre, un modèle EF du DIV a été développé. Une géométrie représentative d'un DIV lombaire moyen a d'abord été construite, puis les lois de comportement permettant de reproduire le gonflement - développées dans le chapitre précédent (cf section 2.4) - ont été utilisées pour le *Nucleus pulposus*. La création d'une étape d'initialisation, qui consiste en une mise sous pression du NP, dans le processus de chargement nous permet d'obtenir une géométrie que l'on veut proche de la géométrie *in vivo*. C'est sur cette dernière que sont appliqués, dans un second temps, les chargements proprement dits.

Une étude du comportement du DIV en compression a permis, d'une part d'identifier les paramètres matériau de l'AF. D'autre part, une analyse de sensibilité du comportement mécanique du DIV en compression aux paramètres matériau du noyau central a été menée. Cette analyse a permis de donner quelques premières conclusions sur les propriétés que doit avoir un hydrogel de substitution du NP.

Enfin, le DIV a été soumis à de multiples cas de chargement, et la réponse mécanique a été observée sous de nombreux aspects, en comparaison l'expérience : mouvements principaux, variation de pression, amplitude des mouvements couplés.

Si l'on revient à présent sur le modèle de gonflement développé pour le NP, on peut tirer plusieurs conclusions de l'ensemble des travaux réalisés dans ce chapitre.

Premièrement, le modèle développé influence fortement la cinématique. Ceci a été montré dans la section 3.2.2 pour la compression. Dès lors, le choix de ce type de modèle pour le NP semble préférable au choix d'un modèle hyperélastique qui sera incapable de reproduire le gonflement. En outre, **le modèle permet de reproduire de façon très satisfaisante la cinématique de DIV quel que soit le chargement** observé, comme le montre la troisième colonne du tableau récapitulatif 3.6 concernant l'amplitude du mouvement principal. Dans la mesure où la plupart des études sur la modélisation du DIV se limite seulement à l'analyse des mouvements principaux, **le modèle de gonflement développé pour le NP est plus que pertinent**.

Deuxièmement, nous avons vu que le modèle est capable de prédire la variation de pression à l'intérieur du NP dans le cas de sollicitations simples, et que, dans le cas de sollicitations pures, les conditions aux limites permettent d'expliquer les divergences par rapport aux données expérimentales. On peut donc dire que, **si les conditions aux limites sont correctement prises en compte, alors le modèle est capable de prédire les variations de pression intradiscale**.

Finalement, à partir d'une géométrie représentative, d'une loi de comportement pertinente pour le NP, et d'un choix de conditions aux limites appropriées, le modèle développé est performant en termes prédictifs. En outre, puisque la loi de comportement utilisée pour le NP est initialement conçu pour les gels, le modèle permet également de « tester » des matériaux (hydrogels) de substitution en fonction de leurs caractéristiques mécaniques (cf section 3.2.2).

# Conclusion générale

La présente étude s'inscrit dans le cadre général du programme BIOREGOS (« **Bio**-matériaux et **R**égénération **O**stéo-Articulaire ») II, dont le but est le développement de stratégies thérapeutiques innovantes dans le domaine de la lutte contre les affections ostéo-articulaires. Ce projet scientifique s'intéresse notamment à la régénération d'une partie du DIV, le *Nucleus pulposus*. L'axe de recherche s'oriente aujourd'hui vers l'élaboration de biomatériaux associés à des cellules souches du patient pour permettre la régénération du tissu lésé. Dans ce contexte d'ingénierie tissulaire, les hydrogels, composés d'un réseau réticulé de chaînes de polymère imbibé d'eau, constituent de bons candidats au remplacement du NP dégradé. Toutefois, les contraintes auxquelles ces matériaux doivent faire face sont nombreuses :

- Ils doivent être injectables, afin de pouvoir proposer aux patients un acte chirurgical le moins invasif possible ;
- Ils doivent assurer une cohésion suffisante pour permettre la formation d'un réseau tridimensionnel saturé en eau ;
- Ils doivent posséder des propriétés mécaniques suffisantes pour supporter les efforts auxquels sont habituellement soumis le DIV.

Dans ce contexte, l'objectif du présent travail était de proposer un modèle pour le DIV, dédié à l'étude du remplacement du NP par des hydrogels. Notre volonté était que ce modèle soit suffisamment riche pour le NP - notamment pour pouvoir décrire le phénomène de gonflement naturel du NP dans son milieu - tout en conservant des caractéristiques génériques (issues de la littérature) pour les autres constituants. La démarche qui a été suivie repose sur le développement d'un modèle théorique de gonflement de type « gel », puis sur la construction d'un modèle Eléments Finis complet de DIV (géométrie, lois de comportement, chargement) intégrant la loi de comportement développée précédemment pour le NP.

Dans un premier temps, un important travail bibliographie a été effectué sur le DIV, dans le but de comprendre le lien entre sa structure, sa composition et son comportement mécanique. Parallèlement, nous nous sommes intéressés aux stratégies de modélisation existantes, observant que celles-ci sont extrêmement variées, tant en termes de géométrie que de lois de comportement et de valeurs choisies pour les paramètres matériau. L'analyse conjointe de ces deux aspects de la bibliographie nous a permis de montrer qu'il était important, dans l'étude du comportement du DIV, de distinguer plusieurs échelles de temps selon les phénomènes physiques que l'on souhaite observer. A l'échelle des temps longs, l'importance de la diffusion des molécules d'eau à l'intérieur de la matrice extracellulaire a été mise en évidence. Dans ce contexte, deux familles de modèles sont proposées dans la littérature : les modèles de type poroélastiques et les modèles couplant mécanique

et diffusion. Si, moyennant quelques modifications de la loi de filtration du liquide dans le NP, le premier type de modèles peut retranscrire un certain phénomène de gonflement, leurs fondements scientifiques nous ont semblés moins sûrs et en tout cas moins adaptés à la description du comportement des matériaux de type « gels » aux temps longs.

Fort de cette analyse, un modèle couplant grandes déformations et diffusion a été développé dans le second chapitre. Deux aspects originaux ont été proposés : la prise en compte d'une dépendance explicite de la raideur du matériau au niveau de gonflement, et la prise en compte d'un état de référence préalablement gonflé. Ces deux améliorations ont été implantées dans le code Eléments Finis ABAQUS pour l'étude des états d'équilibre. L'analyse de quelques exemples concrets a permis de montrer qu'une raideur faible du matériau (dans l'état de référence) ainsi qu'une forte affinité chimique entre le polymère et le solvant tendent à favoriser le gonflement.

Dans le troisième et dernier chapitre, un modèle complet de DIV a été construit. Une géométrie générique d'un DIV lombaire a été proposée en utilisant les données disponibles dans la littérature. Si la loi de comportement utilisée pour l'AF est issue de la littérature, le modèle de gonflement précédemment développé a été mis en application pour le NP. Une analyse de sensibilité du comportement du DIV en compression aux paramètres d'entrée du noyau central a été menée dans le but d'en tirer quelques premières conclusions sur les propriétés que doit posséder un hydrogel de substitution pour remplir son rôle mécanique. En particulier, il a été montré que l'affinité chimique entre le polymère et l'eau n'est pas un paramètre déterminant, et que la raideur de l'hydrogel doit être assez importante ( $> 0,5$  MPa) pour que ce dernier puisse avoir un rôle dans la réponse mécanique du DIV en compression. Enfin, le DIV sain a été sollicité sous divers cas de chargement. Ceci a permis de montrer que le choix d'un modèle de gonflement pour le NP est pertinent puisqu'il permet de reproduire de façon très satisfaisante la cinématique du DIV et de prédire les variations de pression intradiscale, moyennant une bonne prise en compte des conditions aux limites.

Dans ce travail, les contributions majeures qui ont été apportées sont, à notre avis :

- **Une analyse bibliographique la plus complète possible sur les modèles existants pour le DIV** (basée sur environ 90 références). Cette analyse nous a permis de mettre en évidence plusieurs points concernant les modèles de DIV : la géométrie est assez peu documentée, les modèles de comportement qui existent sont très variés, et une très grande disparité des paramètres dans les lois de comportement a été relevée. En outre, cette analyse nous a notamment permis d'établir un classement des modèles par ordre de complexité, et de lister les stratégies de modélisation de la dégénérescence.
- **Le développement d'un modèle théorique de gel, couplant grandes déformations et diffusion, intégrant deux aspects originaux :**
  - la dépendance des paramètres matériau vis-à-vis du niveau de gonflement, permise par la modification des équations classiques,
  - la prise en compte d'un état de référence gonflé.

Il est important de noter que la thématique de modélisation du comportement des matériaux de type gel est une thématique actuelle comme en témoignent les nombreuses publications récentes (qui ont été publiées au cours de la thèse : on peut notamment citer quelques auteurs comme [Chester et Anand \(2010, 2011\)](#) ; [Chester](#)

(2011), Lucantonio *et al.* (2013) ou Drozdov et Christiansen (2013a, b, c)). Le modèle développé dans le présent travail s'inscrit dans cette mouvance.

- **Le développement d'un modèle de DIV capable de reproduire les résultats expérimentaux multiaxiaux**, intégrant : (i) une géométrie générique issue d'une compilation des données bibliographiques, (ii) la loi de comportement précédente, utilisable pour le NP ainsi que pour un hydrogel de substitution, (iii) une analyse très complète portant sur le type de conditions aux limites imposées (solicitation pure ou sollicitation simple), (iv) une discussion sur l'influence des paramètres du noyau central ( $C_0^*$ ,  $\chi$ ,  $\phi_{f,0}$ ) sur la réponse mécanique globale du DIV.

A la lumière des travaux qui ont été effectués, plusieurs perspectives de recherche peuvent être envisagées. Tout d'abord, à court terme, il serait intéressant d'étudier plus avant la combinaison des deux aspects développés pour le modèle gel : la prise en compte d'une dépendance des paramètres matériau vis-à-vis du gonflement, à partir d'une configuration de référence préalablement gonflée. En ce qui concerne le modèle de DIV, l'étude de l'influence des paramètres du noyau central, telle que celle menée en compression, sous d'autres modes de chargement peut être envisagée. Si cette étude est aisément réalisable puisque l'outil numérique est disponible, elle n'en reste pas moins fastidieuse en termes de calcul et de post-traitement des résultats. La torsion ainsi que la flexion/extension pourraient être étudiées prioritairement, dans la mesure où ces sollicitations représentent des modes de chargement usuels auxquels le DIV est soumis au quotidien. Comme cela a été mentionné au cours de ce manuscrit, une démarche d'optimisation des paramètres pour l'AF pourrait également être mise en place. Dans l'idéal, il faudrait comparer les résultats des simulations à des résultats expérimentaux obtenus sur plusieurs cas de chargement simultanément. En outre, on pourrait également envisager de considérer des variations locales des paramètres de l'AF. Il est évident que la complexité et les coûts de calculs engendrés par une telle démarche seraient conséquents. Enfin, le modèle Eléments Finis du DIV pourrait être intégré dans un modèle de segment vertébral complet comprenant un DIV et deux vertèbres consécutives, avec toutes les structures anatomiques remarquables (éléments postérieurs : ligaments, articulations facettaires). Ceci permettrait de comparer directement les résultats issus de la simulation aux résultats expérimentaux de Berkson *et al.* (1979) et Schultz *et al.* (1979).

Dans un second temps, le développement des outils numériques pour la résolution des problèmes couplés mécanique/diffusion dans le cas transitoire pour les gels constitueraient une avancée considérable et permettrait de se positionner aux premiers plans sur cette thématique. Si quelques auteurs ont d'ores et déjà commencé à se diriger dans cette direction (Kang et Huang, 2010 ; Lucantonio *et al.*, 2013), il nous semble que la piste de travail proposée par Chester et Anand (2011) constitue la plus rigoureuse en termes d'écriture et de formalisme mécanique. En ce qui concerne le modèle élaboré pour le DIV, il serait intéressant de pouvoir intégrer une loi d'endommagement pour modéliser la dégénérescence. Ceci pourrait se faire grâce au premier aspect du modèle de gonflement développé, en faisant varier la raideur en fonction du paramètre de gonflement  $J_s$ . Un tel modèle nécessiterait de relier, d'une part la raideur du NP au degré de dégénérescence du DIV (à l'aide des travaux de Massey (2009), par exemple), d'autre part le degré de gonflement du NP au degré de dégénérescence du DIV, ce qui à notre connaissance, n'a encore jamais été évalué expérimentalement. Enfin, la réalisation d'essais expérimentaux dans des conditions

mieux maîtrisées (en termes de chargement, de temps d'application des charges, etc.) permettrait un meilleur contrôle du processus de validation du modèle et une analyse encore plus rigoureuse des résultats des simulations au regard des résultats expérimentaux.

# Références bibliographiques

- ABAQUS 6.11 (2011). *User Subroutines Reference Manual*. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, USA. *cité page 72 et 122*
- ACCADBLED, F. (2007). *Contribution à l'analyse du transport convectif dans le segment vertébral : étude de la perméabilité macroscopique du plateau vertébral*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse 3. *cité page 11*
- ADAMS, M. A., DOLAN, P. et MCNALLY, D. S. (2009). The internal mechanical functioning of intervertebral discs and articular cartilage, and its relevance to matrix biology. *Matrix Biology*, 28(7):384–389. *cité page 10 et 16*
- ADAMS, M. A., MCMILLAN, D. W., GREEN, T. P. et DOLAN, P. (1996). Sustained loading generates stress concentrations in lumbar intervertebral discs. *Spine*, 21(4):434–438. *cité page 14*
- AHARINEJAD, S., BERTAGNOLI, R., WICKE, K., FIRBAS, W. et SCHNEIDER, B. (1990). Morphometric analysis of vertebrae and intervertebral discs as a basis of disc replacement. *The American Journal of Anatomy*, 189(1):69–76. *cité page 9*
- AL-HADIDI, M. T., BADRAN, D. H., AL-HADIDI, A. M. et ABU-GHAIDA, J. H. (2001). Magnetic resonance imaging of normal lumbar intervertebral discs. *Saudi Medical Journal*, 22(11):1013–8. *cité page 9*
- AMONOO-KUOFI (1991). Morphometric changes in the heights and anteroposterior diameters of the lumbar intervertebral discs with age. *Journal of Anatomy*, 175:159–168. *cité page 9*
- ANTONIOU, J., STEFFEN, T., NELSON, F., WINTERBOTTOM, N., HOLLANDER, A. P., POOLE, R. A. et AEBI, M. (1996). The human lumbar intervertebral disc. Evidence for changes in the biosynthesis and denaturation of the extracellular matrix with growth, maturation, ageing, and degeneration. *Journal of Clinical Investigation*, 98(4):996–1003. *cité page 16*
- ARGOUBI, M. et SHIRAZI-ADL, A. (1996). Poroelastic creep response analysis of a lumbar motion segment in compression. *Journal of Biomechanics*, 29(10):1331–1339. *cité page 23, 24, 26, 29, 31, 32, et 35*
- AYTURK, U. M. (2010). *Alterations in lumbar spine mechanics due to degenerative disc disease*. Thèse de doctorat, Colorado State University. *cité page 8, 26, et 34*

- BAEK, S. et PENCE, T. (2011). Inhomogeneous deformation of elastomer gels in equilibrium under saturated and unsaturated conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(3):561–582. cité page 54
- BAEK, S. et SRINIVASA, A. R. (2004). Diffusion of a fluid through an elastic solid undergoing large deformation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39:201–218. cité page 38 et 54
- BAROUD, G., NEMES, J., HEINI, P. et STEFFEN, T. (2003). Load shift of the intervertebral disc after a vertebroplasty : a finite-element study. *European Spine Journal*, 12(4):421–426. cité page 26, 28, 30, 34, et 118
- BERKSON, M. H., NACHEMSON, A. et SCHULTZ, A. B. (1979). Mechanical properties of human lumbar spine motion segments - Part II : Responses in compression and shear ; influence of gross morphology. *Journal of Biomechanical Engineering*, 101:53–57. cité page 124, 125, 129, 138, 139, 140, 141, et 171
- BIOT, M. (1941). General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12:155–164. cité page 38
- BOELEN, E. J. H., van HOOY-CORSTJENS, C. S. J., BULSTRA, S. K., van OOIJ, A., van RHIJN, L. W. et KOOLE, L. H. (2005). Intrinsically radiopaque hydrogels for nucleus pulposus replacement. *Biomaterials*, 26(33):6674–6683. cité page 19
- BOOS, N., WEISSBACH, S., ROHRBACH, H., WEILER, C., SPRATT, K. F. et NERLICH, A. G. (2002). Classification of age-related changes in lumbar intervertebral discs : 2002 Volvo Award in basic science. *Spine*, 27(23):2631–2644. cité page 16 et 18
- BORGES, A., BOURBAN, P.-E., PIOLETTI, D. et MANSON, J.-A. (2010). Curing kinetics and mechanical properties of a composite hydrogel for the replacement of the nucleus pulposus. *Composites Science and Technology*, 70(13):1847–1853. cité page 19
- BORGES, A. C., EYHOLZER, C., DUC, F., BOURBAN, P.-E., TINGAUT, P., ZIMMERMANN, T., PIOLETTI, D. P. et MANSON, J.-A. E. (2011). Nanofibrillated cellulose composite hydrogel for the replacement of the nucleus pulposus. *Acta Biomaterialia*, 7(9):3412–3421. cité page 19
- BOWEN, R. (1976). *Continuum Physics. Part I : Theory of mixtures*. Academic Press, New York. cité page 38
- BOYD, L. M. et CARTER, A. J. (2006). Injectable biomaterials and vertebral endplate treatment for repair and regeneration of the intervertebral disc. *European Spine Journal*, 15 (Suppl. 3):S414–S421. cité page 21
- BROWN, T., HANSEN, R. et YORRA, A. (1957). Some mechanical tests on the lumbosacral spine with particular reference to intervertebral discs. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 39:1135–1164. cité page 124, 125, et 129
- CAMPANA, S. (2004). *Evaluation des relations entre propriétés biomécaniques et imagerie : étude in vitro du disque intervertébral*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, Paris. cité page 10



- CHAGNON, A. (2009). *Etude biomécanique de la dégénérescence du disque intervertébral à l'aide d'un modèle éléments finis poroélastique*. Mémoire de Maîtrise, Université de Montréal. cité page 16, 17, 23, 24, 25, 26, 29, 31, 32, 34, et 35
- CHAGNON, A., AUBIN, C.-E. et VILLEMURE, I. (2010). Biomechanical influence of disk properties on the load transfer of healthy and degenerated disks using a poroelastic finite element model. *Journal of Biomechanical Engineering*, 132(11):111006–1–111006–8. cité page 23, 24, 26, 29, 31, 32, 34, et 35
- CHEN, C.-S., CHENG, C.-K., LIU, C.-L. et LO, W.-H. (2001). Stress analysis of the disc adjacent to interbody fusion in lumbar spine. *Medical Engineering & Physics*, 23:483–491. cité page 28
- CHEN, S.-H., TAI, C.-L., LIN, C.-Y., HSIEH, P.-H. et CHEN, W.-P. (2008). Biomechanical comparison of a new stand-alone anterior lumbar interbody fusion cage with established fixation techniques – a three-dimensional finite element analysis. *BMC Musculoskeletal Disorders*, 9(88):1–10. cité page 26 et 34
- CHESTER, S. A. (2011). *Mechanics of Amorphous polymers and polymer gels*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology. cité page 54 et 170
- CHESTER, S. A. et ANAND, L. (2010). A coupled theory of fluid permeation and large deformations for elastomeric materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(11):1879–1906. cité page 38, 53, 54, 55, 59, 63, 64, 65, 66, 93, 98, et 170
- CHESTER, S. A. et ANAND, L. (2011). A thermo-mechanically coupled theory for fluid permeation in elastomeric materials : Application to thermally responsive gels. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(10):1978–2006. cité page 54, 170, et 171
- CLOITRE, M. (n.r.). *Matériaux Polymères Structures : Mélanges, alliages, copolymères à blocs*. Ouvrage pédagogique ESPCI Paris Tech. cité page 45
- CLOUET, J. (2010). *Développement de l'ingénierie tissulaire du disque intervertébral : de la physiopathologie aux modèles animaux*. Thèse de doctorat, Université de Nantes. cité page 10, 19, et 53
- CLOYD, J. M., MALHOTRA, N. R., WENG, L., CHEN, W., MAUCK, R. L. et ELLIOTT, D. M. (2007). Material properties in unconfined compression of human nucleus pulposus, injectable hyaluronic acid-based hydrogels and tissue engineering scaffolds. *European Spine Journal*, 16(11):1892–1898. cité page 19
- COLEMAN, B. et NOLL, W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13:167–178. cité page 61
- COLOMBINI, A., LOMBARDI, G., CORSI, M. M. et BANFI, G. (2008). Pathophysiology of the human intervertebral disc. *The International Journal of Biochemistry & Cell Biology*, 40(5):837–842. cité page 16 et 17



- COVENTRY, M. B., GHORMLEY, R. K. et KERNOHAN, J. W. (1945). The intervertebral disc : its microscopic anatomy and pathology : Part II. Changes in the intervertebral disc concomitant with age. *The Journal of Bone and Joint Surgery*, 27(2):233–247.  
cité page 15
- DENOZIÈRE, G. (2004). *Numerical Modeling of a Ligamentous Lumbar Motion Segment*. Numéro May. Thèse de Master, Georgia Institute of Technology.  
cité page 23, 25, 26, 28, 30, 111, 112, 113, et 118
- DENOZIÈRE, G. et KU, D. N. (2006). Biomechanical comparison between fusion of two vertebrae and implantation of an artificial intervertebral disc. *Journal of Biomechanics*, 39:766–775.  
cité page 23, 26, 28, 30, et 118
- DREISCHARF, M., ROHLMANN, A., BERGMANN, G. et ZANDER, T. (2011). Optimised loads for the simulation of axial rotation in the lumbar spine. *Journal of Biomechanics*, 44(12):2323–2327.  
cité page 28 et 30
- DROZDOV, A. et CHRISTIANSEN, J. C. (2013a). Constitutive equations in finite elasticity of swollen elastomers. *International Journal of Solids and Structures*, 50(9):1494–1504.  
cité page 38, 53, 54, 65, et 171
- DROZDOV, A. et CHRISTIANSEN, J. C. (2013b). Stress-strain relations for hydrogels under multiaxial deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 50(22-23):3570–3585.  
cité page 38, 53, 54, 95, et 171
- DROZDOV, A. et CHRISTIANSEN, J. C. (2013c). Volume changes in hydrogels subjected to finite deformations. *Mechanics Research Communications*.  
cité page 38, 53, 54, 95, et 171
- DUDA, F., SOUZA, A. et FRIED, E. (2010). A theory for species migration in a finitely strained solid with application to polymer network swelling. *Journal of the Mechanics and Physics of*, 58(4):515–529.  
cité page 38, 53, 54, 55, 59, 64, et 65
- DURNING, C. J. et MORMAN, K. N. (1993). Nonlinear swelling of polymer gels. *Journal of Chemical Physics*, 98(5):4275–4293.  
cité page 38 et 54
- DUŠEK, K. et PRINS, W. (1969). Structure and elasticity of non-crystalline polymer networks. *Advances in Polymer Science*, 6:1–102.  
cité page 51, 55, et 96
- EBERLEIN, R., HOLZAPFEL, G. A. et FRÖHLICH, M. (2004). Multi-segment FEA of the human lumbar spine including the heterogeneity of the annulus fibrosus. *Computational Mechanics*, 34(2):147–163.  
cité page 28 et 30
- EBERLEIN, R., HOLZAPFEL, G. A. et SCHULZE-BAUER, C. A. (2001). An anisotropic model for annulus tissue and enhanced finite element analyses of intact lumbar disc bodies. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 4:209–229.  
cité page 27, 28, 30, 34, 123, et 124
- EHLERS, W., KARAJAN, N. et MARKERT, B. (2006a). A porous media model describing the inhomogeneous behaviour of the human intervertebral disc. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 37(6):546–551.  
cité page 23, 29, 31, et 35

- EHLERS, W., KARAJAN, N. et MARKERT, B. (2009). An extended biphasic model for charged hydrated tissues with application to the intervertebral disc. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 8(3):233–251. cité page 23, 29, 31, et 35
- EHLERS, W., MARKERT, B., KARAJAN, N. et ACART, A. (2006b). A Coupled FE Analysis of the intervertebral disc based on a multiphasic TPM formulation. Rapport technique. cité page 23, 29, 31, et 35
- EIJKELKAMP, M. F., KLEIN, J. P., VELDHUIZEN, A. G., HORN, J. R. V. et VERKERKE, G. J. (n.r.). *Chapter 5. The geometry and shape of the human intervertebral disc.* . cité page 9
- EIJKELKAMP, M. F., van DONKELAAR, C. C., VELDHUIZEN, A. G., HORN, J. R. V., HUYGHE, J. M. et VERKERKE, G. J. (2001). Requirements for an artificial intervertebral disc. *The International Journal of Artificial Organs*, 24(2001):311–321. cité page 9
- ELLIOTT, D. M. et SETTON, L. A. (2000). A linear material model for fiber-induced anisotropy of the annulus fibrosus. *Journal of Biomechanical Engineering*, 122(2):173–179. cité page 12
- ENDRES, M., ABBUSHI, A., THOMALE, U. W., CABRAJA, M., KROPPESTEDT, S. N., MORAWIETZ, L., CASALIS, P. A., ZENCLUSSEN, M. L., LEMKE, A.-J., HORN, P., KAPS, C. et WOICIECHOWSKY, C. (2010). Intervertebral disc regeneration after implantation of a cell-free bioresorbable implant in a rabbit disc degeneration model. *Biomaterials*, 31(22):5836–5841. cité page 19
- EYRE, D. R. et MUIR, H. (1976). Types I and II collagens in intervertebral disc. Interchanging radial distributions in annulus fibrosus. *The Biochemical Journal*, 157(1):267–270. cité page 11
- FAGAN, M. J., JULIEN, S. et MOHSEN, A. M. (2002). Patient-specific spine models. Part I : finite element analysis of the lumbar intervertebral disc - a material sensitivity study. *Proceedings of Institute of Mechanical Engineers. Part H : Journal of Engineering in Medicine*, 216:299–314. cité page 118
- FARRIS, S., SCHAICH, K. M., LIU, L., PIERGIOVANNI, L. et YAM, K. L. (2009). Development of polyion-complex hydrogels as an alternative approach for the production of bio-based polymers for food packaging applications : a review. *Trends in Food Science & Technology*, 20(8):316–332. cité page 53
- FERGUSON, S., ITO, K. et NOLTE, L. (2004). Fluid flow and convective transport of solutes within the intervertebral disc. *Journal of Biomechanics*, 37(2):213–221. cité page 23, 26, 29, 31, 35, et 118
- FLORY, P. J. (1953). *Principles of Polymer Chemistry*. Cornell University Press, Ithaca, New York. cité page 38, 44, 47, 48, 51, 53, 54, 55, 58, 59, 64, 65, et 95
- FRIED, E. et GURTIN, M. (1999). Coherent solid-state phase transitions with atomic diffusion : a thermomechanical treatment. *Journal of Statistical Physics*, 95:1361–1427. cité page 55

- FROBIN, W., BRINCKMANN, P., BIGGERMANN, M., TILLOTSON, M. et BURTON, K. (1997). Precision measurement of disc height, vertebral height and sagittal plane displacement from lateral radiographic views of the lumbar spine. *Clinical Biomechanics*, 12(Supplement Number 1):S1–S64. cité page 9
- FROMENTIN, P. A. O. (2005). *Influence de la localisation, de la direction du flux et de la maturation squelettique sur la perméabilité des plateaux vertébraux du mouton*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse. cité page 11
- FUJII, R., SAKAURA, H., MUKAI, Y., HOSONO, N., ISHII, T., IWASAKI, M., YOSHIKAWA, H. et SUGAMOTO, K. (2007). Kinematics of the lumbar spine in trunk rotation : in vivo three-dimensional analysis using magnetic resonance imaging. *European Spine Journal*, 16(11):1867–1874. cité page 7
- FUJITA, Y., DUNCAN, N. A. et LOTZ, J. C. (1997). Radial tensile properties of the lumbar annulus fibrosus are site and degeneration dependent. *Journal of Orthopaedic Research*, 15:814–819. cité page 17
- GALBUSERA, F., SCHMIDT, H., NEIDLINGER-WILKE, C. et WILKE, H.-J. (2011a). The effect of degenerative morphological changes of the intervertebral disc on the lumbar spine biomechanics : a poroelastic finite element investigation. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 14(8):729–739. cité page 24, 26, 29, 31, et 35
- GALBUSERA, F., SCHMIDT, H., NOAILLY, J., MALANDRINO, A., LACROIX, D., WILKE, H.-J. et SHIRAZI-ADL, A. (2011b). Comparison of four methods to simulate swelling in poroelastic finite element models of intervertebral discs. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4(7):1234–1241. cité page 23, 32, et 35
- GASSER, T. C., OGDEN, R. W. et HOLZAPFEL, G. A. (2006). Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the Royal Society Interface*, 3:15–35. cité page 121
- GIBAS, I. et JANIK, H. (2010). Review : Sythetic polymer hydrogels for biomedical. *Chemistry and Chemical Technology*, 4(4):297–304. cité page 53
- GOCMEN-MAS, N., KARABEKIR, H., ERTEKIN, T., EDIZER, M., CANAN, Y. et DUYAR, I. (2010). Evaluation of lumbar vertebral body and disc : a stereological morphometric study. *International Journal of Morphology*, 28(3):841–847. cité page 9
- GOINS, M. L., WIMBERLEY, D. W., YUAN, P. S., FITZHENRY, L. N. et VACCARO, A. R. (2005). Nucleus pulposus replacement : an emerging technology. *The Spine Journal*, 5(Suppl. 6):317S–324S. cité page 20
- GONZALEZ GUTIERREZ, R. A. (2012). *Biomechanical study of intervertebral disc degeneration*. Thèse de doctorat, Universitat Politècnica de Catalunya. cité page 26, 28, 30, 32, 34, et 36
- GOTO, K., TAJIMA, N., CHOSA, E., TOTORIBE, K., KUROKI, H., ARIZUMI, Y. et ARAI, T. (2002). Mechanical analysis of the lumbar vertebrae in a three-dimensional finite element method model in which intradiscal pressure in the nucleus pulposus was used to establish the model. *Journal of Orthopaedic Science*, 7:243–246. cité page 26, 32, et 34

- GROTH, K. M. et GRANATA, K. P. (2008). The viscoelastic standard nonlinear solid model : predicting the response of the lumbar intervertebral disk to low-frequency vibrations. *Journal of Biomechanical Engineering*, 130(3):031005–1–031005–6. cité page 30
- GUERIN, H. A. L. et ELLIOTT, D. M. (2006). Degeneration affects the fiber reorientation of human annulus fibrosus under tensile load. *Journal of Biomechanics*, 39(8):1410–1418. cité page 11, 12, et 17
- GUNDOGAN, N., MELEKASLAN, D. et OKAY, O. (2002). Rubber Elasticity of Poly(N-isopropylacrylamide) Gels at Various Charge Densities. *Macromolecules*, 35(14):5616–5622. cité page 70 et 79
- GUO, Z., PENG, X. et MORAN, B. (2006). A composites-based hyperelastic constitutive model for soft tissue with application to the human annulus fibrosus. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(9):1952–1971. cité page 27 et 28
- GURTIN, M. E., FRIED, E. et ANAND, L. (2010). *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, New York. cité page 55
- HADJIPAVLOU, A., TZERMIADIANOS, M., BOGDUK, N. et ZINDRICK, M. R. (2008). The pathophysiology of disc degeneration : a critical review. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 90(10):1261–1270. cité page 17
- HAMEL, O. (2012). *Disque intervertébral lombal. Contribution à la compréhension des phénomènes de dégénérescence discale*. Thèse de doctorat, Université de Nantes. cité page 7, 10, 11, et 17
- HARRIS, W., FLEMING, J. et GERTZBEIN, S. (1997). Lombalgie. Rapport technique, à l'intention du Tribunal d'appel de la sécurité professionnelle et de l'assurance contre les accidents du travail. cité page 7
- HEUER, F., SCHMIDT, H. et WILKE, H.-J. (2008). The relation between intervertebral disc bulging and annular fiber associated strains for simple and complex loading. *Journal of Biomechanics*, 41(5):1086–1094. cité page 34
- HOLMES, A. D. et HUKINS, D. W. (1996). Analysis of load-relaxation in compressed segments of lumbar spine. *Medical Engineering & Physics*, 18(2):99–104. cité page 13
- HOLZAPFEL, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons. cité page 54 et 121
- HOLZAPFEL, G. A., SCHULZE-BAUER, C. A. J., FEIGL, G. et REGITNIG, P. (2005). Single lamellar mechanics of the human lumbar anulus fibrosus. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 3(3):125–140. cité page 11 et 12
- HONG, W., LIU, Z. et SUO, Z. (2009). Inhomogeneous swelling of a gel in equilibrium with a solvent and mechanical load. *International Journal of Solids and Structures*, 46(17):3282–3289. cité page 54, 59, 64, 65, et 72
- HONG, W., ZHAO, X., ZHOU, J. et SUO, Z. (2008). A theory of coupled diffusion and large deformation in polymeric gels. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(5):1779–1793. cité page 38, 53, 54, 55, 59, 64, 65, et 76

- HOY, D., BAIN, C., WILLIAMS, G., MARCH, L., BROOKS, P., BLYTH, F., WOOLF, A., VOS, T. et BUCHBINDER, R. (2012). A systematic review of the global prevalence of low back pain. *Arthritis and Rheumatism*, 64(6):2028–2037. cité page 19
- IATRIDIS, J., LAIBLE, J. et KRAG, M. (2003). Influence of fixed charge density magnitude and distribution on the intervertebral disc : applications of a poroelastic and chemical electric (peace) model. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125(1):12–24. cité page 23, 29, 31, et 32
- IATRIDIS, J., SETTON, L., WEIDENBAUM, M. et MOW, V. (1997). The viscoelastic behavior of the non-degenerate human lumbar nucleus pulposus in shear. *Journal of biomechanics*, 9290(97):1005–1013. cité page 13
- IATRIDIS, J., WEIDENBAUM, M., SETTON, L. A. et MOW, V. C. (1996). Is the nucleus pulposus a solid or a fluid ? Mechanical behaviors of the nucleus pulposus of the human intervertebral disc. *Spine*, 21(10):1174–1184. cité page 13
- IATRIDIS, J. C., SETTON, L. A., FOSTER, R. J., RAWLINS, B. A., WEIDENBAUM, M. et MOW, V. C. (1998). Degeneration affects the anisotropic and nonlinear behaviors of human annulus fibrosus in compression. *Journal of Biomechanics*, 31(6):535–544. cité page 17
- IBARZ, E., HERRERA, A., MAS, Y., RODRIGUEZ-VELA, J., CEGONINO, J., PUÉRTOLAS, S. et GRACIA, L. (2013). Development and kinematic verification of a finite element model for the lumbar spine : application to disc degeneration. *BioMed Research International*, 2013:1–18. cité page 28
- JHURRY, D. (1997). Agricultural polymers. In *AMAS 1997. Food and Agricultural Research Council*, pages 109–113. cité page 53
- JONES, A. C. et WILCOX, R. K. (2008). Finite element analysis of the spine : towards a framework of verification, validation and sensitivity analysis. *Medical Engineering & Physics*, 30(10):1287–1304. cité page 27
- JONGENEELLEN, C. (2006). *Confocal microscopic observation of micromechanical 3D finite strains in intervertebral disc annulus fibrosus under osmotic loading*. Thèse de Matser, Eindhoven University of Technology. cité page 11
- JOSHI, A., FUSSELL, G., THOMAS, J., HSUAN, A., LOWMAN, A., KARDUNA, A., VRESILOVIC, E. et MARCOLONGO, M. (2006). Functional compressive mechanics of a PVA/PVP nucleus pulposus replacement. *Biomaterials*, 27(2):176–184. cité page 19
- JOSHI, A., MEHTA, S., VRESILOVIC, E., KARDUNA, A. et MARCOLONGO, M. (2005). Nucleus implant parameters significantly change the compressive stiffness of the human lumbar intervertebral disc. *Journal of Biomechanical Engineering*, 127(3):536–540. cité page 19
- KANG, M. K. et HUANG, R. (2010). A variational approach and finite element implementation for swelling of polymeric hydrogels under geometric constraints. *Journal of Applied Mechanics*, 77(6):061004–1–061004–1. cité page 54, 65, et 171



- KARAJAN, N. (2009). *An Extended Biphasic Description of the Inhomogeneous and Anisotropic Intervertebral Disc*. Thèse de doctorat, Universität Stuttgart. cité page 8, 11, 12, 31, 34, et 38
- KARAJAN, N. (2012). Multiphasic intervertebral disc mechanics : theory and application. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 19(2):261–339. cité page 31 et 34
- KARAJAN, N., RÖHRLE, O., EHLERS, W. et SCHMITT, S. (2013). Linking continuous and discrete intervertebral disc models through homogenisation. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 12:453–466. cité page 21
- KUO, C.-S., HU, H.-T., LIN, R.-M., HUANG, K.-Y., LIN, P.-C., ZHONG, Z.-C. et HSEIH, M.-L. (2010). Biomechanical analysis of the lumbar spine on facet joint force and intradiscal pressure - a finite element study. *BMC Musculoskeletal Disorders*, 11:151–163. cité page 26, 28, 30, et 118
- KURUTZ, M. et OROSZVÁRY, L. (2010). Finite element analysis of weightbath hydro-traction treatment of degenerated lumbar spine segments in elastic phase. *Journal of Biomechanics*, 43(3):433–441. cité page 23, 26, 28, 30, 32, et 34
- LAIBLE, J. P., PFLASTER, D. S., KRAG, M. H., SIMON, B. R. et D, H. L. (1993). A poroelastic-swelling finite element model with application to the intervertebral disc. *Spine*, 18(5):659–670. cité page 26, 29, 31, et 35
- LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strain. *Journal of Applied Mechanics*, 35:1–6. cité page 59
- LITTLE, J. P. (2004). *Finite Element Modelling of Annular Lesions in the Lumbar Intervertebral Disc*. Thèse de doctorat, Queensland University of Technology. cité page 10, 16, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 111, 112, et 113
- LITTLE, J. P., ADAM, C. J., EVANS, J. H., PETTET, G. J. et PEARCY, M. J. (2007a). Nonlinear finite element analysis of annular lesions in the L4/5 intervertebral disc. *Journal of Biomechanics*, 40(12):2744–2751. cité page 23, 24, 26, 28, 30, 32, et 34
- LITTLE, J. P., PEARCY, M. J. et PETTET, G. J. (2007b). Parametric equations to represent the profile of the human intervertebral disc in the transverse plane. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 45:939–945. cité page 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 111, et 112
- LODYGOWSKI, T., KAKOL, W. et WIERSZYCKY, M. (2005). Three-dimensional nonlinear finite element model of lumbar intervertebral disc. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 7(2):29–37. cité page 21, 26, 27, 28, 30, et 34
- LUBARDA, V. A. (2004). Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient : thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 57:95–108. cité page 59
- LUCANTONIO, A., NARDINOCCHI, P. et TERESI, L. (2013). Transient analysis of swelling-induced large deformations in polymer gels. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(1):205–218. cité page 38, 53, 54, 65, 95, et 171

- LUOMA, K., RIIHIMÄKI, H., LUUKKONEN, R., RAININKO, R., VIKARI-JUNTURA, E. et LAMMINEN, a. (2000). Low back pain in relation to lumbar disc degeneration. *Spine*, 25(4):487–492. *cité page 19*
- MAGNIER, C. (2009). *Contribution à la compréhension de la dégénérescence discale - Interaction entre le comportement osmoticomécanique du disque intervertébral et le transport et le métabolisme de ses nutriments*. Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille. *cité page 23, 25, 26, 29, 31, 32, 36, 38, 111, 112, et 113*
- MAGNIER, C., BOIRON, O., WENDLING-MANSUY, S., CHABRAND, P. et DEPLANO, V. (2009). Nutrient distribution and metabolism in the intervertebral disc in the unloaded state : a parametric study. *Journal of Biomechanics*, 42(2):100–108. *cité page 23, 26, 29, 31, et 32*
- MALANDRINO, A., NOAILLY, J. et LACROIX, D. (2011). Regional annulus fibre orientations used as a tool for the calibration of lumbar intervertebral disc finite element models. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, pages 37–41. *cité page 26, 29, 31, et 35*
- MALANDRINO, A., PLANELL, J. A. et LACROIX, D. (2009). Statistical factorial analysis on the poroelastic material properties sensitivity of the lumbar intervertebral disc under compression, flexion and axial rotation. *Journal of Biomechanics*, 42(16):2780–2788. *cité page 26, 29, 31, et 34*
- MARCOVSCHI CHAMPAIN, S. (2008). *Corrélation entre les paramètres biomécaniques du rachis et les indices cliniques pour l’analyse quantitative des pathologies du rachis lombaire et de leur traitement chirurgical*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, Paris. *cité page 6*
- MARK, J. E. (1999). *Polymer Data Handbook*. Oxford University Press. *cité page 121*
- MARKOLF, K. L. et MORRIS, J. M. (1974). The Structural Components Disc of the Intervertebral. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 56-A(4):675–687. *cité page 124, 125, et 129*
- MARTINEZ, J. B., OLOYEDE, V. O. et BROOM, N. D. (1997). Biomechanics of load-bearing of the intervertebral disc : an experimental and finite element model. *Medical Engineering & Physics*, 19(2):145–156. *cité page 26, 29, 31, et 35*
- MASSEY, C. J. (2009). *Finite Element Analysis and Material Characterization of Changes due to Aging and Degeneration of the Human Intervertebral Disc*. Thèse de doctorat, Drexel University. *cité page 17, 23, 26, 29, 31, 32, 35, et 171*
- MEAKIN, J. et HUKINS, D. (2001). Replacing the nucleus pulposus of the intervertebral disk : prediction of suitable properties of a replacement material using finite element analysis. *Journal of Materials Science : Materials in Medicine*, 2:207–213. *cité page 23, 28, et 34*
- MEAKIN, J. R., REID, J. E. et HUKINS, D. W. (2001). Replacing the nucleus pulposus of the intervertebral disc. *Clinical Biomechanics*, 16(7):560–565. *cité page 30*

- MORAMARCO, V., PÉREZ DEL PALOMAR, A., PAPPALETTERE, C. et DOBLARÉ, M. (2010). An accurate validation of a computational model of a human lumbosacral segment. *Journal of Biomechanics*, 43(2):334–342. cité page 23, 28, 30, 34, et 123
- NACHEMSON, A. et ELFSTROM, G. (1970). *Intravital dynamic pressure measurements in lumbar discs : a study of common movements, maneuvers and exercises*. Almqvist & Wiksell, Stockholm. cité page 13, 32, et 116
- NADEAU, S., BOUZID, H. et PRUD'HOMME, D. (2008). Étude du mécanisme lésionnel de la hernie discale : modélisation du comportement élastique non linéaire. *Revue Internationale sur l'Ingénierie des Risques Industriels*, 1(1):46–64. cité page 30
- NATARAJAN, R. N. et ANDERSSON, G. B. (1999). The influence of lumbar disc height and cross-sectional area on the mechanical response of the disc to physiologic loading. *Spine*, 24(18):1873–1881. cité page 23, 24, 26, 28, et 30
- NATARAJAN, R. N., WILLIAMS, J. R. et ANDERSSON, G. B. J. (2004). Recent advances in analytical modeling of lumbar disc degeneration. *Spine*, 29(23):2733–2741. cité page 28 et 32
- NERURKAR, N. L., ELLIOTT, D. M. et MAUCK, R. L. (2010). Mechanical design criteria for intervertebral disc tissue engineering. *Journal of Biomechanics*, 43(6):1017–1030. cité page 12
- NEUMANN, D. A. (2010). *Kinesiology of the Musculoskeletal System, Foundations for Rehabilitation*. Mosby Elsevier. cité page 9
- NOAILLY, J., WILKE, H.-J., PLANELL, J. A. et LACROIX, D. (2007). How does the geometry affect the internal biomechanics of a lumbar spine bi-segment finite element model? Consequences on the validation process. *Journal of Biomechanics*, 40:2414–2425. cité page 26, 28, et 30
- OCHIA, R. S., INOUE, N., RENNER, S. M., LORENZ, E. P., LIM, T.-H., ANDERSSON, G. B. J. et AN, H. S. (2006). Three-dimensional in vivo measurement of lumbar spine segmental motion. *Spine*, 31(18):2073–2078. cité page 7
- O'CONNELL, G. D., GUERIN, H. L. et ELLIOTT, D. M. (2009). Theoretical and uniaxial experimental evaluation of human annulus fibrosus degeneration. *Journal of Biomechanical Engineering*, 131(11):111007–1–111007–7. cité page 27, 28, et 123
- OGDEN, R. W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester. cité page 48 et 59
- ONO, T., SUGIMOTO, T., SHINKAI, S. et SADA, K. (2008). Molecular design of superabsorbent polymers for organic solvents by crosslinked lipophilic polyelectrolytes. *Advanced Functional Materials*, 18(24):3936–3940. cité page 44
- OPENSTAX COLLEGE (2013). *Anatomy & Physiology*. URL : <http://cnx.org/content/col11496/1.6/>. cité page 1



- PAESOLD, G., NERLICH, A. G. et BOOS, N. (2007). Biological treatment strategies for disc degenerations : potentials and shortcomings. *European Spine Journal*, 16(4):447–468.  
cité page 19
- PAL, K., BANTHIA, A. K. et MAJUMDAR, D. K. (2009). Polymeric Hydrogels : Characterization and Biomedical Applications - A mini review. *Designed Monomers and Polymers*, 12:197–220.  
cité page 53
- PENG, X., WANG, Y., GUO, Z. et SHI, S. (2011). Numerical validation of a fiber-reinforced hyperelastic constitutive model for human intervertebral disc annulus fibrosus. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 11(01):163–176.  
cité page 26 et 30
- PENG, X. Q., GUO, Z. Y. et MORAN, B. (2006). An anisotropic hyperelastic constitutive model with fiber-matrix shear interaction for the human annulus fibrosus. *Journal of Applied Mechanics*, 73(5):815–824.  
cité page 27, 28, et 34
- PEPPAS, N. A., BURES, P., LEOBANDUNG, W. et ICHIKAWA, H. (2000). Hydrogels in pharmaceutical formulations. *European Journal of Pharmaceutics and Biopharmaceutics*, 50(1):27–46.  
cité page 53
- PODIO-GUIDUGLI, P. (2009). A virtual power format for thermomechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20:479–487.  
cité page 55
- PRUD'HOMME, D. (2008). *Mécanisme de la hernie discale : Modélisation non-linéaire*. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec.  
cité page 23 et 34
- QUESADA-PÉREZ, M., MAROTO-CENTENO, J. A., FOCADA, J. et HIDALGO-ALVAREZ, R. (2011). Gel swelling theories : the classical formalism and recent approaches. *Soft Matter*, 7:10536–10547.  
cité page 51
- RAJAGOPAL, K. (2003). Diffusion through polymeric solids undergoing large deformations. *Materials Science and Technology*, 19:1175–1180.  
cité page 38
- RAJAGOPAL, K. et TAO, L. (1995). *The Mechanics of Mixtures*. Volume 35, Series on advances in mathematics for applied sciences, World Scientific.  
cité page 38
- RAJAGOPAL, K., WINEMAN, A. et GANDHI, M. (1986). On boundary conditions for a certain class of problems in mixture theory. *International Journal of Engineering Science*, 24:1453–1463.  
cité page 38
- RANNOU, F., POIRAUDEAU, S., CORVOL, M. et REVEL, M. (2000). Contraintes mécaniques et disque intervertébral lombaire. *Revue du Rhumatisme*, 67(4):219–224.  
cité page 11
- ROBIN, S., SKALLI, W. et LAVASTE, F. (1994). Influence of geometrical factors on the behavior of lumbar spine segments : a finite element analysis. *European Spine Journal*, 3:84–90.  
cité page 26, 28, 30, et 34
- ROHLMANN, A., ZANDER, T., RAO, M. et BERGMANN, G. (2009). Realistic loading conditions for upper body bending. *Journal of Biomechanics*, 42(7):884–890.  
cité page 23, 30, et 34

- ROHLMANN, A., ZANDER, T., SCHMIDT, H., WILKE, H.-J. et BERGMANN, G. (2006). Analysis of the influence of disc degeneration on the mechanical behaviour of a lumbar motion segment using the finite element method. *Journal of Biomechanics*, 39(13):2484–2490. cité page 24, 28, 30, et 34
- RUBINSTEIN, M. et COLBY, R. H. (2003). *Polymer Physics*. Oxford University Press. cité page 44
- SALEM, W., KLEIN, P. et BONNET, C. (n.r.). Etude paramétrique du disque intervertébral L4-L5 à cinq secteurs par la méthode des éléments finis en flexion-torsion. cité page 29, 31, et 34
- SANNINO, A. (2008). Application of Superabsorbent Hydrogels for The Optimization of Water Resources in Agriculture. *In the 3rd International Conference on Water Resources and Arid Environments and the 1st Arab Water Forum*. cité page 53
- SASSON, A., PATCHORNIK, S., ELIASY, R., ROBINSON, D. et HAJ-ALI, R. (2012). Hyperelastic mechanical behavior of chitosan hydrogels for nucleus pulposus replacement - Experimental testing and constitutive modeling. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 8:143–153. cité page 19
- SCHMIDT, H., HEUER, F., DRUMM, J., KLEZL, Z., CLAES, L. et WILKE, H.-J. (2007a). Application of a calibration method provides more realistic results for a finite element model of a lumbar spinal segment. *Clinical Biomechanics*, 22:377–384. cité page 24, 26, 28, 30, et 34
- SCHMIDT, H., HEUER, F., SIMON, U., KETTLER, A., ROHLMANN, A., CLAES, L. et WILKE, H.-J. (2006). Application of a new calibration method for a three-dimensional finite element model of a human lumbar annulus fibrosus. *Clinical Biomechanics*, 21(4):337–344. cité page 23, 26, 28, 30, et 34
- SCHMIDT, H., HEUER, F. et WILKE, H.-J. (2009). Dependency of disc degeneration on shear and tensile strains between annular fiber layers for complex loads. *Medical Engineering & Physics*, 31(6):642–649. cité page 24, 26, 28, 30, et 34
- SCHMIDT, H., KETTLER, A., ROHLMANN, A., CLAES, L. et WILKE, H.-J. (2007b). The risk of disc prolapses with complex loading in different degrees of disc degeneration - a finite element analysis. *Clinical Biomechanics*, 22:988–998. cité page 24, 26, 28, 30, 32, et 34
- SCHRÖDER, Y. (2008). *Putting pressure on the spine. An osmoviscoelastic FE model of the intervertebral disc*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology. cité page 15, 23, 29, 31, et 35
- SCHROEDER, Y., HUYGHE, J. M., van DONKELAAR, C. C. et ITO, K. (2010). A biochemical/biophysical 3D FE intervertebral disc model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 9(5):641–650. cité page 23, 29, 31, et 35
- SCHROEDER, Y., SIVAN, S., WILSON, W., MERKHER, Y., HUYGHE, J. M., MAROUDAS, A. et BAAIJENS, F. P. T. (2007). Are disc pressure, stress, and osmolarity affected by intra- and extrafibrillar fluid exchange? *Journal of Orthopaedic Research*, (25):1317–1324. cité page 23, 29, 31, et 35

- SCHROEDER, Y., WILSON, W., HUYGHE, J. M. et BAAIJENS, F. P. T. (2006). Osmoviscoelastic finite element model of the intervertebral disc. *European Spine Journal*, 15(Suppl. 3):S361–S371. *cité page 23, 29, 31, et 35*
- SCHULTZ, A. B., WARWICK, D. N., BERKSON, M. H. et NACHEMSON, A. L. (1979). Mechanical properties of human lumbar spine motion segments - Part I : Responses in flexion, extension, lateral bending, and torsion. *Journal of Biomechanical Engineering*, 101:46–52. *cité page 138, 139, 140, 141, et 171*
- SÉLARD, E., SHIRAZI-ADL, A. et URBAN, J. P. G. (2003). Finite element study of nutrient diffusion in the human intervertebral disc. *Spine*, 28(17):1945–1953. *cité page 23*
- SHAH, J. S., HAMPSON, W. G. et JAYSON, M. I. (1978). The distribution of surface strain in the cadaveric lumbar spine. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 60:246–251. *cité page 124 et 129*
- SHANKAR, H., SCARLETT, J. A. et ABRAM, S. E. (2009). Anatomy and pathophysiology of intervertebral disc disease. *Techniques in Regional Anesthesia and Pain Management*, 13(2):67–75. *cité page 6, 10, et 11*
- SHARIFI, S. (2012). *The development of novel biodegradable polymeric biomaterials for use in the repair of damaged intervertebral discs*. Thèse de doctorat, Rijksuniversiteit Groningen. *cité page 19*
- SHIRAZI-ADL, A. (2006). Analysis of large compression loads on lumbar spine in flexion and in torsion using a novel wrapping element. *Journal of Biomechanics*, 39(2):267–275. *cité page 21 et 30*
- SIDOROFF, F. (1974). Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *Journal de Mécanique*, 13:679–713. *cité page 59*
- SILVA, P., CROZIER, S., VEIDT, M. et PEARCY, M. J. (2005). An experimental and finite element poroelastic creep response analysis of an intervertebral hydrogel disc model in axial compression. *Journal of Materials Science : Materials in Medicine*, 16:663–669. *cité page 23, 26, 29, 31, 35, et 118*
- SINGH, A., SHARMA, P. K., GARG, V. K. et GARG, G. (2010). Hydrogels : a review. *International Journal of Pharmaceutical Sciences Review and Research*, 4(2):97–105. *cité page 53*
- SOUKANE, D. M., SHIRAZI-ADL, A. et URBAN, J. P. G. (2005). Analysis of nonlinear coupled diffusion of oxygen and lactic acid in intervertebral discs. *Journal of Biomechanical Engineering*, 127(7):1121–1126. *cité page 23*
- STRANGE, D. G. T. et OYEN, M. L. (2012). Composite hydrogels for nucleus pulposus tissue engineering. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 11:16–26. *cité page 19*
- TRELOAR, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*. Clarendon Press, Oxford University. *cité page 38, 44, et 54*

- TRUESDELL, C. et TOUPIN, R. (1960). *The Classical Field Theories*. Springer, Berlin.  
cité page 38
- TWOMEY, L. et TAYLOR, J. (1985). Age changes in lumbar intervertebral discs. *Acta Orthopaedica Scandinavica*, 56(6):496–9.  
cité page 9
- UMEHARA, S., TADANO, S., ABUMI, K., KATAGIRI, K., KANEDA, K. et UKAI, T. (1996). Effects of degeneration on the elastic modulus distribution in the lumbar intervertebral disc. *Spine*, 21(7):811–819.  
cité page 17
- URBAN, J. P. G. et ROBERTS, S. (2003). Review. Degeneration of the intervertebral disc. *Arthritis Research and Therapy*, 5(3):120–130.  
cité page 17
- van den BROEK, P. R., HUYGHE, J. M., WILSON, W. et ITO, K. (2012). Design of next generation total disk replacements. *Journal of Biomechanics*, 45(1):134–140. cité page 19
- VERVOORT, S. (2006). *Comportement d’hydrogels gonflés de solutions de polymères sous action mécanique*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.  
cité page 43, 50, 51, et 95
- WANG, J. L., PARNIANPOUR, M., SHIRAZI-ADL, A. et ENGIN, A. E. (2000). Viscoelastic finite-element analysis of a lumbar motion segment in combined compression and sagittal flexion. Effect of loading rate. *Spine*, 25(3):310–318.  
cité page 26, 30, et 35
- WANG, S. (2012). *In vivo lumbar spine biomechanics : vertebral kinematics, intervertebral disc deformation, and disc loads*. Thèse de doctorat, University of Michigan. cité page 7
- WEISS, P. (2007). Tuteurs de vie. *Têtes chercheuses*, 2:12–13.  
cité page 2
- WHATLEY, B. R. et WEN, X. (2012). Intervertebral disc (IVD) : Structure, degeneration, repair and regeneration. *Materials Science and Engineering C*, 32(2):61–77. cité page 19
- WILKE, H., NEEF, P., HINZ, B., SEIDEL, H. et CLAES, L. (2001). Intradiscal pressure together with anthropometric data - a data set for the validation of models. *Clinical Biomechanics*, 16(Suppl. 1):S111–S126.  
cité page 13 et 32
- WILKE, H. J., NEEF, P., CAIMI, M., HOOGLAND, T. et CLAES, L. E. (1999). New in vivo measurements of pressures in the intervertebral disc in daily life. *Spine*, 24(8):755–762.  
cité page 13, 14, et 32
- WILLIAMS, J. R., NATARAJAN, R. N. et ANDERSSON, G. B. J. (2007). Inclusion of regional poroelastic material properties better predicts biomechanical behavior of lumbar discs subjected to dynamic loading. *Journal of Biomechanics*, 40(9):1981–1987.  
cité page 26, 29, 31, et 35
- WU, J. S. et CHEN, J. H. (1996). Clarification of the mechanical behaviour of spinal motion segments through a three-dimensional poroelastic mixed finite element model. *Medical Engineering & Physics*, 18(3):215–224.  
cité page 26, 29, et 31
- XIA, Q., WANG, S., KOZANEK, M., PASSIAS, P., WOOD, K. et LI, G. (2010). In-vivo motion characteristics of lumbar vertebrae in sagittal and transverse planes. *Journal of Biomechanics*, 43(10):1905–1909.  
cité page 7

- YAO, H. et GU, W. Y. (2006). Physical signals and solute transport in human intervertebral disc during compressive stress relaxation : 3D finite element analysis. *Biorheology*, 43:323–335. cité page 23, 29, et 31
- YAO, H. et GU, W. Y. (2007). Three-dimensional inhomogeneous triphasic finite-element analysis of physical signals and solute transport in human intervertebral disc under axial compression. *Journal of Biomechanics*, 40(9):2071–2077. cité page 23, 29, et 31
- YAO, J., TURTELTAUB, S. R. et DUCHEYNE, P. (2006). A three-dimensional nonlinear finite element analysis of the mechanical behavior of tissue engineered intervertebral discs under complex loads. *Biomaterials*, 27(3):377–387. cité page 26, 28, et 30
- ZANDER, T., ROHLMANN, A., BURRA, N. K. et BERGMANN, G. (2006). Effect of a posterior dynamic implant adjacent to a rigid spinal fixator. *Clinical Biomechanics*, 21(8):767–774. cité page 24, 28, 30, et 34
- ZANDER, T., ROHLMANN, A., CALISSE, J. et BERGMANN, G. (2001). Estimation of muscle forces in the lumbar spine during upper-body inclination. *Clinical Biomechanics*, 16(Suppl. 1):S73–S80. cité page 30 et 34
- ZHANG, J., ZHAO, X., SUO, Z. et JIANG, H. (2009a). A finite element method for transient analysis of concurrent large deformation and mass transport in gels. *Journal of Applied Physics*, 105(9):093522. cité page 54 et 65
- ZHANG, Q. H., ZHOU, Y. L., PETIT, D. et TEO, E. C. (2009b). Evaluation of load transfer characteristics of a dynamic stabilization device on disc loading under compression. *Medical Engineering & Physics*, 31:533–538. cité page 24, 26, 28, 30, et 34
- ZOU, J., YANG, H., MIYAZAKI, M., MORISHITA, Y., WEI, F., MCGOVERN, S. et WANG, J. C. (2009). Dynamic bulging of intervertebral discs in the degenerative lumbar spine. *Spine*, 34(23):2545–2550. cité page 15
- ZRINYI, M. et HORKAY, F. (1987). On the elastic modulus of swollen gels. *Polymer*, 28:1139–1143. cité page 50

## Annexe A

# Subroutine UHYPER pour le modèle généralisé

```
      SUBROUTINE UHYPER(BI1,BI2,AJ,U,UI1,UI2,UI3,TEMP,NOEL,
1  CMNAME,INCMPLAG,NUMSTATEV,STATEV,NUMFIELDV,FIELDV,
2  FIELDVINC,NUMPROPS,PROPS)
C=====
C      User defined hyperelastic material subroutine for gels
C      (epsilon model)
C      Author: Violette Brulliard, 2012
C-----
C      Material properties to be passed to the subroutine:
C      PROPS(1) - C0
C      PROPS(2) - chi
C      PROPS(3) - lambda_0    initial swelling
C      PROPS(4) - eps        epsilon
C      State variable:
C      TEMP      - (mu-mu0)/kT    current chemical potential
C      The initial value of chemical potential should agree
C      with the initial swelling, given as follows:
C      (mu-mu0)/kT|init = C0*nu/kT*(1/lambda_0-1/lambda_0**3)
C      + ln(1-1/lambda_0**3) + 1/lambda_0**3+ chi/lambda_0**3**2
C      Output:
C      Free-energy function U(I,J) and its derivatives
C      All free-energy density and stress given by the
C      calculation are normalized by kT/v
C=====
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      CHARACTER*80 CMNAME
      DIMENSION U(2),UI1(3),UI2(6),UI3(6),STATEV(*),FIELDV(*),
1  FIELDVINC(*),PROPS(*)
      REAL(8) C0, chi, lambda0, detF0, deltam_u_kT, nu, kT, gamma
      C0 = PROPS(1)
      chi = PROPS(2)
      lambda0 = PROPS(3)
      eps = PROPS(4)
      detF0 = lambda0**3
      nu = 1.0d-28
```

```

kT = 4.0d-21
gamma = kT/nu/C0
deltamu_kT = TEMP ! TEMP is used to represent (mu-mu0)/kT
C=====
C
  U(1) = (log(1.0 - 1.0/(AJ*detF0))
& + chi/(AJ*detF0))*(AJ - 1.0/detF0)
& - deltamukT*(AJ - 1.0/detF0) - (2.0*log(AJ*detF0)
& - 3.0*AJ**(2.0/3.0)*detF0**(2.0/3.0) + 3.0)/(2.0*detF0*gamma)
& + (AJ*(BI1 - 3.0))/(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 1.0/3.0))
  U(2) = 0
  UI1(1) = AJ/(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 1.0/3.0))
  UI1(2) = 0
  UI1(3) = log(1.0 - 1.0/(AJ*detF0)) - deltamukT
& - (AJ - 1.0/detF0)*(chi/(AJ**2.0*detF0)
& + 1.0/(AJ**2.0*detF0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0)))
& - (2.0/AJ - (2.0*detF0**(2.0/3.0))/AJ**(1.0/3.0))/(2.0*detF0*gamma)
& + chi/(AJ*detF0)
& + (BI1 - 3.0)/(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 1.0/3.0))
& - (AJ*detF0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)*(BI1 - 3.0))
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 4.0/3.0))
  UI2 = 0
  UI2(3) = (AJ - 1.0/detF0)*((2.0*chi)/(AJ**3.0*detF0)
& + 2.0/(AJ**3.0*detF0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0))
& - 1.0/(AJ**4.0*detF0**2.0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0)**2.0))
& + (2.0/AJ**2.0 - (2.0*detF0**(2.0/3.0))/(3.0*AJ**(4.0/3.0)))
& /(2.0*detF0*gamma) - (2.0*chi)/(AJ**2.0*detF0)
& - 2.0/(AJ**2.0*detF0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0))
& - (detF0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)*(BI1 - 3.0))
& /(gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 4.0/3.0))
& + (AJ*detF0**2.0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)
& *(eps/3.0 + 4.0/3.0)*(BI1 - 3.0))
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 7.0/3.0))
  UI2(5) = 1.0/(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 1.0/3.0))
& - (AJ*detF0*(eps/3.0 + 1.0/3.0))
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 4.0/3.0))
  UI3 = 0
  UI3(4) = (AJ*detF0**2.0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)*(eps/3.0 + 4.0/3.0))
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 7.0/3.0))
& - (detF0*(eps/3.0 + 1.0/3.0))
& /(gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 4.0/3.0))
  UI3(6) = (6.0*chi)/(AJ**3.0*detF0)
& - (4.0/AJ**3.0 - (8.0*detF0**(2.0/3.0))/(9.0*AJ**(7.0/3.0)))
& /(2.0*detF0*gamma) - (AJ - 1.0/detF0)*((6.0*chi)/(AJ**4.0*detF0)
& + 6.0/(AJ**4.0*detF0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0))
& - 6.0/(AJ**5.0*detF0**2.0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0)**2.0)
& + 2.0/(AJ**6.0*detF0**3.0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0)**3.0))
& + 6.0/(AJ**3.0*detF0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0))
& - 3.0/(AJ**4.0*detF0**2.0*(1.0/(AJ*detF0) - 1.0)**2.0)
& + (3.0*detF0**2.0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)
& *(eps/3.0 + 4.0/3.0)*(BI1 - 3.0))

```



```
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 7.0/3.0))  
& - (AJ*detF0**3.0*(eps/3.0 + 1.0/3.0)*(eps/3.0 + 4.0/3.0)  
& *(eps/3.0 + 7.0/3.0)*(BI1 - 3.0))  
& /(2.0*gamma*(AJ*detF0)**(eps/3.0 + 10.0/3.0))  
C  
    RETURN  
    END  
C=====
```





## Annexe B

# Gonflement uniaxial transitoire, code Matlab

```
function oneD_swelling_epsilon

clear all;
close all;
clc;

%% CHOIX DU MODELE
global mod;
disp('-----');
disp('1: modèle classique');
disp('2: modèle epsilon');
disp('-----');
mod = input('Quel modèle souhaitez-vous étudier ? ');

%% Définition des constantes du problème

global nu k T chi alpha beta C0 Js_H0_t Js_X3_0 H0 eps;

k = 1.3806e-23; % constante de Boltzmann
T = 20+273.15; % température absolue (K)
nu = 1e-28; % volume d'une molécule de polymère
C0 = 1e5; % raideur du polymère sec
gamma = k*T/nu/C0; % coeff. matériau "réduit"
chi = 0.1; % coefficient d'interaction solvant/polymère
D = 5e-9; % coefficient de diffusion
beta = 1;
alpha = D/(k*T)*nu^(beta-1);
H0 = 0.01; % hauteur initiale
eps = 2;

%% Condition initiale (t=0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
Js_X3_0 = 0.999999; % théoriquement, Js_X3_0 = 1
lambda_X3_0 = Js_X3_0.^(1/3);
phi_X3_0 = 1./Js_X3_0;

%% Conditions aux limites
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% X3 = H0
initH01 = 3;
initH02 = 10;

if (mod==1)
    Js_H0_t = fzero(@(z) gamma*(log(1-1/z) + 1/z + chi/(z^2)) + (z - 1/z), initH01)
elseif (mod==2)
    Js_H0_t = fzero(@(z) gamma*(log(1-1/z) + 1/(z) + chi/(z^2)) ...
        + z^(-1/3) - z^(-1) + (eps/3-1)*z^(-1/3*(1+eps)) + z^(1-eps/3), initH02)
end
lambda_H0_t = Js_H0_t
phi_H0_t = 1/Js_H0_t

%% Résolution de l'EDP
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

m = 0;
x = linspace(0,1,100); % changement de variable x=X3/H0
t = linspace(0,2*24*60*60,1*24+1);
sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);

%% Extraction de Js, lambda et phi
Js = sol(:, :, 1);
phi = 1./Js;

%% Représentation de la réponse

% figure
% grid on
% surf(x,t,phi)
% title('1D transient swelling of a gel')
% xlabel('X_3 / H_0')
% ylabel('t (s)')
% zlabel('phi')
%
% figure
% grid on
% surf(x,t,Js)
% title('1D transient swelling of a gel')
% xlabel('X_3 / H_0')
% ylabel('t (s)')
```

```

% ylabel('J_s')

figure
plot(x, phi(1,:), x, phi(2,:), x, phi(3,:), x, phi(4,:), x, phi(5,:), ...
     x, phi(7,:), x, phi(10,:), x, phi(15,:), x, phi(24,:), 'LineWidth', 1.25)
axis([0 1 0 1])
xlabel('X_3 / H_0')
ylabel('\phi')
grid on

figure
plot(x, Js(1,:), x, Js(2,:), x, Js(3,:), x, Js(4,:), x, Js(5,:), ...
     x, Js(7,:), x, Js(10,:), x, Js(15,:), x, Js(24,:), 'LineWidth', 1.25)
axis([0 1 0 9])
xlabel('X_3 / H_0')
ylabel('J_s')
grid on

%% Définitions des fonctions utilisées
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% -----
function [c,f,s] = pdex1pde(~,~,u,DuDx)
global nu k T chi alpha beta C0 H0 mod eps;
coeff = 1/H0^2 * alpha/(nu^(beta-1)) * (u-1)^beta; % changement de variable x=X3/L
DmumixDJs = k*T * (1/(u^2)/(u-1) - 2*chi/(u^3));
c = 1;
s = 0;
if (mod==1)
    DmuDJs = nu*C0*(1 + u^(-2));
elseif (mod==2)
    DmuDJs = nu*C0 * (-1/3*u^(-4/3) + u^(-2) ...
        -1/3*(eps/3-1)*(1+eps)*u^(-1/3*(4+eps)) + (1-eps/3)*u^(-eps/3));
end
f = coeff * (DmumixDJs + DmuDJs) * DuDx;
% -----
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(~,~,~,ur,~)
global Js_H0_t nu;
% X3 = H0 (right)
pr = ur - Js_H0_t;
qr = 0;
% X3 = 0 (left)
pl = 0;
ql = -1/nu;
% -----
function u0 = pdex1ic(~)
global Js_X3_0;
u0 = Js_X3_0;
% -----

```



## Annexe C

# Subroutine UHYPER pour le modèle préalablement gonflé

```
      SUBROUTINE UHYPER(BI1,BI2,AJ,U,UI1,UI2,UI3,TEMP,NOEL,
1  CMNAME,INCMPLAG,NUMSTATEV,STATEV,NUMFIELDV,FIELDV,
2  FIELDVINC,NUMPROPS,PROPS)
C=====
C      User defined hyperelastic material subroutine for gels
C      (classical model, swollen ref.)
C      Author: Violette Brulliard, 2012
C-----
C      Material properties to be passed to the subroutine:
C      PROPS(1) - C0          shear modulus at preparation
C      PROPS(2) - chi
C      PROPS(3) - lambda_0    initial swelling
C      PROPS(4) - phi_prepa   polymer volume fraction at preparation
C      State variable:
C      TEMP      - (mu-mu0)/kT    current chemical potential
C      The initial value of chemical potential should agree
C      with the initial swelling, given as follows:
C      mu_0/kT = Nv*(1./lambda_0-1./detF0) + ln(1-1./detF0)
C              + 1./detF0+ chi/detF0**2.
C      where detF0 = lambda_0**3
C      Output:
C      Free-energy function U(I,J) and its derivatives
C      All free-energy density and stress given by the
C      calculation are normalized by kT/v
C=====
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      CHARACTER*80 CMNAME
      DIMENSION U(2),UI1(3),UI2(6),UI3(6),STATEV(*),FIELDV(*),
1  FIELDVINC(*),PROPS(*)
      REAL C0, chi, lambda0, phi_prepa,
& nu, kT, gamma, detF0, Js_prepa, deltamukT
      C0 = PROPS(1)
      chi = PROPS(2)
      lambda0 = PROPS(3)
      phi_prepa = PROPS(4)
```

```

nu = 3.0e-29
kT = 4.0e-21
gamma = kT/nu/C0
detF0 = lambda0**3.0
Js_prepa = 1.0/phi_prepa;
deltamu_kT = TEMP ! TEMP is used to represent (mu-mu0)/kT
C
  U(1) = - deltamukT*(AJ - 1./detF0) - (2.*LOG(AJ*detF0)
& - AJ**(2./3.)*BI1*lambda0**2. + 3.)/(2.*detF0*gamma)
& - ((1./detF0 - AJ*Js_prepa)*(LOG(1. - 1./(AJ*Js_prepa*detF0))
& + chi/(AJ*Js_prepa*detF0)))/Js_prepa
  U(2) = 0
  UI1(1) = (AJ**(2./3.)*lambda0**2.)/(2.*detF0*gamma)
  UI1(2) = 0
  UI1(3) = LOG(1. - 1./(AJ*Js_prepa*detF0)) - deltamukT
& - (2./AJ - (2.*BI1*lambda0**2.)/(3.*AJ**(1./3.)))/(2.*detF0*gamma)
& + ((1./detF0 - AJ*Js_prepa)*(1./(AJ**2.*Js_prepa*detF0*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))
& + chi/(AJ**2.*Js_prepa*detF0)))/Js_prepa + chi/(AJ*Js_prepa*detF0)
  UI2 = 0
  UI2(3) = (2./AJ**2. - (2.*BI1*lambda0**2.)/(9.*AJ**(4./3.)))
& /(2.*detF0*gamma) - ((1./detF0 - AJ*Js_prepa)*
& (2./(AJ**3.*Js_prepa*detF0*(1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))
& - 1./(AJ**4.*Js_prepa**2.*detF0**2.*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1)**2.)
& + (2.*chi)/(AJ**3.*Js_prepa*detF0)))/Js_prepa
& - 2./(AJ**2.*Js_prepa*detF0*(1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))
& - (2.*chi)/(AJ**2.*Js_prepa*detF0)
  UI2(5) = lambda0**2./(3.*AJ**(1./3.)*detF0*gamma)
  UI3 = 0
  UI3(4) = -lambda0**2./(9.*AJ**(4./3.)*detF0*gamma)
  UI3(6) = ((1./detF0 - AJ*Js_prepa)*(6./(AJ**4.*Js_prepa*detF0*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))
& - 6./(AJ**5.*Js_prepa**2.*detF0**2.*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))**2.)
& + 2./(AJ**6.*Js_prepa**3.*detF0**3.*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))**3.)
& + (6.*chi)/(AJ**4.*Js_prepa*detF0)))/Js_prepa
& - (4./AJ**3. - (8.*BI1*lambda0**2.)/(27.*AJ**(7./3.)))/
& (2.*detF0*gamma) + 6./(AJ**3.*Js_prepa*detF0*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))
& - 3./(AJ**4.*Js_prepa**2.*detF0**2.*
& (1./(AJ*Js_prepa*detF0) - 1.))**2.)
& + (6.*chi)/(AJ**3.*Js_prepa*detF0)
C
  RETURN
  END
C=====

```





# Thèse de Doctorat

Violette BRULLIARD

**Titre : Etude du comportement du *Nucleus pulposus* à l'aide d'un modèle couplant grandes déformations et diffusion**

**Title: A coupled large strain and diffusion model for the *Nucleus pulposus* behaviour**

## Résumé

Le disque intervertébral (DIV), composé du *Nucleus pulposus* (NP) central, de l'*Annulus fibrosus* et des plateaux cartilagineux, est la structure située entre deux vertèbres consécutives. Son rôle est principalement d'assurer la flexibilité de la colonne. Toutefois, suite au vieillissement, le NP subit un phénomène de dégénérescence, entraînant une altération des fonctions mécaniques du DIV. Dans le contexte de l'ingénierie tissulaire, des hydrogels (biomatériaux composés de chaînes de polymère réticulées et d'eau) peuvent être utilisés comme matériaux de remplacement.

L'objectif de ce travail est de contribuer à une meilleure compréhension du comportement du DIV afin d'aider à l'élaboration de ces hydrogels. Dans ce but, un modèle de gonflement, couplant grandes déformations et diffusion, a été développé pour le NP. Deux aspects originaux ont été pris en compte : la dépendance explicite des paramètres matériau au degré de gonflement, et la définition d'un état de référence préalablement gonflé. Cette loi de comportement a été implantée dans le code de calcul ABAQUS pour l'étude des états d'équilibre. Finalement, un modèle Eléments Finis de DIV a été construit en adoptant une géométrie générique représentative d'un disque lombaire moyen. Une étude approfondie du comportement du DIV en compression et sous divers cas de chargement a été menée afin d'observer l'influence des paramètres matériau d'un noyau hydrogel sur la réponse du DIV. A la lumière des résultats, il s'avère que le modèle de gonflement adopté pour le NP est pertinent puisqu'il permet de reproduire de façon satisfaisante la cinématique du DIV et de prédire certaines variations de pression intradiscale.

## Mots clés

disque intervertébral, nucleus pulposus, (hydro)gel, gonflement, modèle de comportement, grandes déformations, diffusion, simulation Eléments Finis

## Abstract

The intervertebral disc (IVD) is the anatomical structure that joins two consecutive vertebrae. It consists in three main parts: the central *Nucleus pulposus* (NP), the surrounding *Annulus fibrosus* and the cartilaginous endplates. Its role is mainly to ensure flexibility of the spine. However, due to ageing or pathological conditions, the NP may degenerate causing an alteration of its mechanical properties. In the context of tissue engineering, hydrogels (biomaterials made of crosslinked polymer chains and water) are good candidates for replacing the degraded NP.

This work aims to better understand of the IVD behaviour in order to help the design of these hydrogels. In that purpose, a coupled large strain and diffusion model for the nucleus pulposus has been developed. Two original aspects have been considered: an explicit dependence of the material parameters on the swelling degree, and the introduction of an already swollen reference configuration. This constitutive equation has been implemented in the Finite Element software ABAQUS in order to investigate the equilibrium states. Eventually, a complete Finite Element model of the IVD has been created, based on a generic geometry of a mean lumbar disc. A thorough study of the IVD behaviour in compression and submitted to several loading conditions has been carried out in order to examine the influence of the mechanical parameters of a replacing hydrogel on the kinematics of the IVD. It is shown that the choice of a coupled deformation-swelling model for the NP is relevant since it allows to satisfactorily reproduce the kinematics of the IVD and to predict some intradiscal pressure changes.

## Key Words

intervertebral disc, nucleus pulposus, (hydro)gel, swelling, constitutive equation, large strain, diffusion, Finite Element simulation